

ГЛАВА II

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

§ 1. Введение

В этой главе мы ставим перед собой следующие задачи:

А. Зная свойства функции, оценить скорость, с которой ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю (то, что они должны стремиться к нулю, было доказано в § 19 гл. I).

Б. Имея последовательности чисел

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

установить, существует ли функция, имеющая их своими коэффициентами Фурье, и если да, то каковы ее свойства.

К сожалению, эти задачи далеко не могут считаться полностью решенными. Поэтому мы вынуждены решать их частично. Так, например, мы изучаем скорость стремления к нулю для коэффициентов Фурье функции с ограниченным изменением (см. § 2) для функций из класса $Lip\ \alpha$ (см. § 3), для функций из класса L^p ($p > 1$) (§§ 4 и 5). Но в то же время мы показываем, что если $f(x)$ только суммируема, то ее коэффициенты могут стремиться к нулю как угодно медленно (§ 6). С другой стороны, мы показываем (см. § 7), что если не учитывать знаков чисел a_n и b_n , а налагать ограничение только на их абсолютные величины, то и задачу Б нельзя решить, кроме того случая, когда $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ (этот случай был уже разобран в § 16 гл. I).

Таким образом, вопрос о поведении коэффициентов Фурье для $f(x) \in L$ является очень тонким вопросом. Мы указываем все же в § 9 некоторые необходимые условия для этих коэффициентов, и даже в § 10 условия необходимые и достаточные, однако они являются очень мало прозрачными. Решение проблемы Б, или так называемой «тригонометрической проблемы моментов», служило предметом многих работ, но, к сожалению, здесь формулировки таковы, что для конкретно заданной последовательности чисел не удается выяснить, являются ли они коэффициентами Фурье, и тем более найти соответствующую функцию. Большинство теорем оказываются сведением поставленного вопроса к некоторому другому, тоже весьма трудному. Поэтому полученные результаты мы приводим в § 11 без доказательств.

§ 12 посвящен вопросу несколько иного рода: можно ли утверждать, что тригонометрический ряд должен быть рядом Фурье, если все его частные суммы неотрицательны при любом x ? Этот вопрос тоже не решен до конца, но мы сочли целесообразным изложить то, что в этом направлении известно. Наконец, в § 13 мы касаемся вопроса о преобразованиях рядов Фурье.

§ 2. Порядок коэффициентов Фурье для функций с ограниченным изменением. Критерий для непрерывности функции с ограниченным изменением

1. Порядок коэффициентов Фурье для функций с ограниченным изменением. Мы видели (см. гл. I, § 22), что если $f(x)$ есть функция с ограниченным изменением, то

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

Мы знаем, что если $f(x)$ разрывна, то эту оценку улучшить нельзя, так как разрывы у функций с ограниченным изменением могут быть только 1-го рода, а при этих условиях улучшение оценки (1) невозможно (см. глава I, § 42).

Возникает вопрос, нельзя ли утверждать, что

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

если $f(x)$, кроме того, еще непрерывна. Мы покажем, что и это неверно.

С этой целью мы построим на отрезке $[0, 2\pi]$ множество, подобное классическому канторовскому, которое строится на отрезке $[0, 1]$, т. е. выбросим сначала из сегмента $[0, 2\pi]$ интервал $\delta_1^{(1)}$ с центром в точке π и длины $\frac{2\pi}{3}$, затем из каждых двух оставшихся сегментов выбросим интервалы $\delta_1^{(2)}$ и $\delta_2^{(2)}$ длины $\frac{2\pi}{3^2}$ с центрами в серединах отрезков $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$, из которых они выбрасывались, и т. д. Если $\Phi(0) = 0$, $\Phi(2\pi) = 1$, $\Phi(x) = \frac{1}{2}$ на $\delta_1^{(1)}$, $\Phi(x) = \frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ соответственно на $\delta_1^{(2)}$ и $\delta_2^{(2)}$ и т. д. и она дополняется по непрерывности в точках канторовского множества, то получается классическая канторова ступенчатая кривая, которая возрастает от 0 до 1, причем $\Phi'(x) = 0$ почти всюду.

Если мы положим $f(x) = \Phi(x) - \frac{x}{2\pi}$, то $f(0) = f(2\pi) = 0$, а потому $f(x)$ непрерывна не только внутри отрезка $[0, 2\pi]$, но и на всей бесконечной оси, если положить $f(x + 2\pi) = f(x)$. Ясно, что она имеет ограниченное изменение и, однако, мы сейчас покажем, что ее коэффициенты Фурье не могут иметь порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, а лишь $O\left(\frac{1}{n}\right)$. С этой целью мы проинтегрируем по частям интеграл в правой части равенства

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\Phi(x) - \frac{x}{2\pi} \right] e^{-inx} dx,$$

что дает

$$c_n = \frac{1}{2\pi ni} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi = \frac{P_n}{2\pi ni}$$

(здесь интеграл взят в смысле Стильеса, см. Вводный материал, § 16).

Докажем, что для $n = 3^m$ ($m = 0, 1, \dots$) все числа P_n равны между собой и отличны от нуля, откуда и будет следовать, что $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, но $c_n \neq o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Имеем

$$P_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\Phi.$$

Поэтому, так как $\Phi(x)$ постоянна на $\delta_1^{(1)}$, а на сегменте $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$ она меняется так же, как на $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$, только поднята на $\frac{1}{2}$ вверх, то

$$P_{3m} = \int_0^{2\pi} e^{-i3mx} d\Phi = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} e^{-i3mx} d\Phi;$$

но, совершая здесь замену переменного $3x = t$, получим

$$P_{3m} = 2 \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \int_0^{2\pi} e^{-i3^{m-1}x} d\Phi = P_{3^{m-1}},$$

так как $\Phi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}\Phi(x)$. Отсюда видно, что

$$P_{3^m} = P_{3^0} = P_1 = \int_0^{2\pi} e^{-ix} d\Phi.$$

Остается показать, что эта величина $P_1 \neq 0$. Для этого мы рассмотрим ее действительную часть, т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x d\Phi &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi = 2 \left(\int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos x d\Phi + \int_{\frac{4\pi}{9}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x d\Phi \right) = \\ &= 2 \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \left[\cos x + \cos \left(x + \frac{4\pi}{9} \right) \right] d\Phi = 4 \int_0^{\frac{2\pi}{9}} \cos \left(x + \frac{2\pi}{9} \right) \cos \frac{2\pi}{9} x d\Phi \geq \\ &\geq 4 \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \int_0^{\frac{2\pi}{9}} d\Phi = \frac{8\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} > 0, \end{aligned}$$

и таким образом наше утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. То, что коэффициенты Фурье от построенной нами функции не имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, можно вывести также из общих теорем, касающихся проблемы единственности разложения функции в тригонометрический ряд (см. глава XIV, § 7), но мы предпочли сделать это здесь непосредственным вычислением, чтобы не отсылать читателя к тонким методам там, где можно обойтись очень простыми рассуждениями.

З а м е ч а н и е 2. Возникает вопрос, нельзя ли, наоборот, по поведению коэффициентов Фурье установить, что функция имеет ограниченное изменение. Укажем здесь достаточное условие Лоренца (Lorentz^[1]):

1) если $1 \leq p \leq 2$ и

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.2)$$

или

2) если $2 \leq p \leq \infty$ и

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}}}\right), \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (2.3)$$

то $f(x)$ имеет ограниченное изменение. При этом Лоренц показывает на примерах, что теорема утратит силу, если в формуле (2.2) заменить $\frac{1}{n}$ на $\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha < 1$ или в (2.3) заменить $\frac{1}{2} + \frac{1}{p'}$ любым меньшим числом.

2. Критерий для непрерывности функции с ограниченным изменением. Мы доказали, что существуют непрерывные функции с ограниченным изменением, у которых коэффициенты имеют порядок $O\left(\frac{1}{n}\right)$, а не $o\left(\frac{1}{n}\right)$. Возникает вопрос, нельзя ли по характеру коэффициентов Фурье заключить о непрерывности функции с ограниченным изменением? Ответ на этот вопрос можно указать в нескольких различных формах. Одной из таких форм является

Теорема Винера (Wiener^[1]). Для того чтобы функция с ограниченным изменением была непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_1 + 2\varrho_2 + \dots + n\varrho_n}{n} = 0, \quad (2.4)$$

где $\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Мы сначала докажем, что необходимое и достаточное условие может быть записано в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = 0, \quad (2.5)$$

а потом докажем эквивалентность условий (2.4) и (2.5).

Если ряд Фурье для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

то

$$f(x+t) \sim \frac{1}{2} A_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos mx + B_m(t) \sin mx,$$

где

$$A_m(t) = a_m \cos mt + b_m \sin mt, \quad A_0(t) = \frac{a_0}{2},$$

$$B_m(t) = b_m \cos mt - a_m \sin mt,$$

следовательно,

$$f(x+t) - f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \cos mx + \beta_m(t) \sin mx,$$

где

$$\begin{aligned} a_m(t) &= A_m(t) - a_m = a_m(\cos mt - 1) + b_m \sin mt = \\ &= 2 \sin m \frac{t}{2} \cos m \frac{t}{2} b_m - 2 \sin^2 m \frac{t}{2} a_m = \\ &= \left(b_m \cos m \frac{t}{2} - a_m \sin m \frac{t}{2} \right) 2 \sin m \frac{t}{2} = B_m\left(\frac{t}{2}\right) 2 \sin m \frac{t}{2}; \\ \beta_m(t) &= B_m(t) - b_m = b_m(\cos mt - 1) - a_m \sin mt = \\ &= 2 \sin \frac{mt}{2} \left(-b_m \sin m \frac{t}{2} - a_m \cos m \frac{t}{2} \right) = -2 \sin \frac{mt}{2} A_m\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[B_m\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos mx - A_m\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin mx \right] \sin m \frac{\pi}{2n}$$

и, следовательно, по равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f(x) \right]^2 dx &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + B_m^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right] \sin^2 m \frac{\pi}{2n} = \\ &= 4 \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

В силу периодичности подынтегрального выражения имеем для любого k

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left[x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right] \right)^2 dx = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}.$$

Заставляя k пробегать значения $1, 2, \dots, 2n$ и складывая полученные равенства, найдем

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2 dx = 8\pi n \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n}. \quad (2.6)$$

Если заметить, что в случае непрерывности $f(x)$ имеем

$$\left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ (см. Вводный материал, § 25), то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2 &\leq \\ &\leq \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{2n} \left| f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq V \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

где V — полное изменение $f(x)$. Поэтому в силу (2.6)

$$n \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 m \frac{\pi}{2n} \leq \frac{1}{4} V \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

и, значит, если $f(x)$ непрерывна, то условие (2.5) действительно выполняется.

Допустим теперь, что $f(x)$ разрывна. Значит, найдется такая точка ξ , что $|f(\xi + 0) - f(\xi - 0)| = d \neq 0$.

Мы условимся считать

$$f(\xi) = \frac{f(\xi + 0) + f(\xi - 0)}{2}.$$

Тогда для всех достаточно больших n любой отрезок $[\alpha, \beta]$ длины $\frac{\pi}{n}$ содержащий точку ξ , таков, что в нем $|f(\beta) - f(\alpha)| > \frac{d}{3}$, следовательно, для любого x в сумме $\sum_{k=1}^{2n} \left[f\left(x + k \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + (k-1) \frac{\pi}{n}\right) \right]^2$ содержится член, превосходящий $\frac{d^2}{9}$, а потому и интеграл от этой суммы не меньше чем $\frac{2\pi}{9} d^2$, т. е. не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Итак, мы доказали, что условие (2.5) необходимо и достаточно для непрерывности $f(x)$.

Докажем теперь, что (2.5) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 \varrho_k^2 = 0. \quad (2.7)$$

Возьмем целое число r , которое подберем позже, и, обозначая через P_n число, стоящее в левой части формулы (2.5), разобьем P_n на два слагаемых

$$n \sum_{k=1}^{nr} \varrho_k^2 \sin^2 k \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad n \sum_{k=nr+1}^{\infty} \varrho_k^2 \sin^2 k \frac{\pi}{2n}.$$

Мы видим, что

$$P_n < n \sum_{k=1}^{nr} \varrho_k^2 \left(k \frac{\pi}{2n}\right)^2 + n \sum_{k=nr+1}^{\infty} \varrho_k^2.$$

Обозначим через Q_n сумму, стоящую в левой части (2.7). Мы знаем (см. гл. I, § 22), что

$$|a_k| \leq \frac{V}{k} \quad \text{и} \quad |b_k| \leq \frac{V}{k},$$

откуда

$$\varrho_k^2 \leq 2 \frac{V^2}{k^2}$$

и, значит,

$$P_n < \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2 V_n^2 \sum_{k=nr+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4} r Q_{nr} + 2 \frac{V^2}{r}. \quad (2.8)$$

Взяв r достаточно большим, мы можем сделать второй член правой части (2.8) как угодно малым. После этого мы r зафиксируем, а n устремим в бесконечность, тогда при $Q_n \rightarrow 0$ получим $P_n \rightarrow 0$.

Наоборот, если $P_n \rightarrow 0$, то и подално

$$n \sum_{k=1}^n \varrho_k^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \rightarrow 0,$$

а так как при $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin u \geq \frac{2}{\pi} u$, то и

$$n \sum_{k=1}^n \varrho_k^2 \left(\frac{k}{n}\right)^2 \rightarrow 0,$$

а это и значит, что $Q_n \rightarrow 0$. Итак, эквивалентность (2.5) и (2.7) установлена.

Полагая

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \varrho_k,$$

имеем, в силу неравенства Буняковского,

$$T_n^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k \varrho_k \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} n \sum_{k=1}^n (k \varrho_k)^2 \leq Q_n$$

и, значит, из $Q_n \rightarrow 0$ следует $T_n \rightarrow 0$.

С другой стороны, так как

$$\varrho_k < \sqrt{2} \frac{V}{k},$$

то

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k \varrho_k)^2 < \sqrt{2} V \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \varrho_k = \sqrt{2} V T_n,$$

а потому из $T_n \rightarrow 0$ следует $Q_n \rightarrow 0$.

Итак, (2.7) и (2.4) эквивалентны, а поэтому эквивалентны (2.5) и (2.4). Следовательно, теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы Винера вытекает, что если $f(x)$ с ограниченным изменением и

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то $f(x)$ непрерывна. Это было уже доказано в § 42 главы I.

З а м е ч а н и е 2. С. М. Лозинский^[2] дал другую форму условия, при котором функция с ограниченным изменением оказывается непрерывной, а именно: для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_1^n \varrho_k = o(\ln n),$$

где снова $\varrho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

§ 3. 0 коэффициентах Фурье для функций из класса $\text{Lip } \alpha$

Пусть

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Тогда (см. Lorentz^[1]) имеем:

Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ и $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2} (0 < p \leq 2)$, то

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}.$$

Действительно, так как для $f(x+h) - f(x-h)$ ряд Фурье имеет вид

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nh, \quad (3.1)$$

то, в силу равенства Парсеваля и $f \in \text{Lip } \alpha$,

$$4 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kh = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+h) - f(t-h)]^2 dt \leq C h^{2\alpha},$$

где C — постоянное. Поэтому при любом n

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kh \leq C |h|^{2\alpha}$$

и, полагая $h = \frac{\pi}{4n}$ и замечая, что тогда $\sin^2 kh \geq \frac{1}{2}$ при $n \leq k \leq 2n - 1$, найдем

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \leq C_1 \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

где C_1 — новая константа.

Применяя неравенство Гельдера, находим отсюда

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leq \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{p}{2}} (2n)^{1-\frac{p}{2}},$$

откуда

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \leq \frac{C_2}{n^{p(\alpha + \frac{1}{2}) - 1}}.$$

Но тогда из $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ заключаем

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} &= \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j n}^{2^{j+1}n-1} (|a_k|^p + |b_k|^p) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \frac{C_2}{n^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p(\alpha + \frac{1}{2}) - 1}} \right)^j \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_3}{n^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. В частности, при $p = 2$ отсюда получаем, что для $f \in \text{Lip } \alpha$

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

С л е д с т в и е 2. Если $\alpha > \frac{1}{2}$, то теорему можно применить при $p = 1$, откуда

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}}}\right),$$

и так как правая часть стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то отсюда вытекает теорема Бернштейна: *если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, то ее ряд Фурье сходится абсолютно.*

(Эта теорема будет также доказана иначе в гл. IX.)

Лоренц показывает на примерах, в каком смысле его теорему нельзя улучшить. Мы не будем останавливаться на этом, отсылая к работе автора, здесь же докажем другую теорему Лоренца, где, наоборот, по поведению коэффициентов Фурье можно заключить, что $f(x)$ принадлежит к некоторому классу Липшица, а именно:

Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

то $f(x) \in \text{Lip } \alpha$.

Действительно, из условия теоремы следует

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{C}{n^a},$$

поэтому

$$\sum_{k=n}^{2n-1} k(|a_k| + |b_k|) \leq 2Cn^{1-a}.$$

В силу того, что ряд Фурье для $f(x+h) - f(x-h)$ имеет вид (3.1), имеем

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x-h)| &\leq 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} (|a_k| + |b_k|) k|h| + 2 \sum_{k=2^n}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \\ &\leq C_1 |h| \sum_{j=1}^n 2^{(1-a)(j-1)} + 2 \frac{C}{2^{an}} \leq C_2 \left(|h| 2^{(1-a)n} + \frac{1}{2^{an}} \right). \end{aligned}$$

Если мы выберем n так, чтобы

$$\frac{1}{2^n} < |h| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

то отсюда

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq \frac{K}{2^{na}} \leq K|h|^a,$$

где K — новое постоянное, и теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{1+a}}\right),$$

то

$$f(x) \in \text{Lip } \alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Действительно, в этом случае $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$, и мы находимся в условиях предыдущей теоремы.

В работе Лоренца читатель найдет ряд других интересных теорем о функциях, принадлежащих к классу $\text{Lip } \alpha$, и некоторых их обобщениях.

§ 4. Связь между степенью суммируемости функции и коэффициентами Фурье

Известно (см. гл. I, §§ 13 и 16), что если $f(x) \in L^2$ и $\{c_n\}$ — ее коэффициенты Фурье по любой нормированной ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

и это неравенство превращается в равенство, если система полна. Напротив, если дана последовательность чисел $\{c_n\}$, для которых $\sum |c_n|^2 < +\infty$, то найдется $f(x) \in L^2$, для которой эти числа будут коэффициентами Фурье и

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Вопрос теперь ставится так: если p — любое число, лишь бы $p > 1$, и мы знаем, что $f(x) \in L^p$, то что можно сказать об ее коэффициентах Фурье? И наоборот, если $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p < +\infty$, то существует ли функция, имеющая эти c_n своими коэффициентами Фурье, и какова степень ее суммируемости?

Ответы на эти вопросы для случая тригонометрической системы даются теоремой Хаусдорфа—Юнга (см. Hausdorff^[1] и W. H. Young^{[4],[5]}), для общей ортогональной — теоремой Рисса (см. F. Riesz^[2]). Прежде чем их сформулировать, введем обозначения. Мы будем писать

$$\|f\|_r = \left\{ \int_a^b |f|^r dt \right\}^{\frac{1}{r}}$$

и

$$\|c\|_r = \left\{ \sum_n |c_n|^r \right\}^{\frac{1}{r}},$$

где r — любое положительное число. Будем обозначать через p число, удовлетворяющее неравенствам

$$1 < p < 2$$

и через q число, определяемое формулой

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда $q > 2$. Имеем теорему:

Теорема Хаусдорфа — Юнга. 1) Пусть

$$f(t) \in L^p(0, 1)$$

и пусть

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.1)$$

т. е. c_n — ее коэффициенты Фурье по нормированной и ортогональной на $(0, 1)$ системе $\{e^{2\pi i n t}\}$. Тогда

$$\|c\|_q \leq \|f\|_p. \quad (4.2)$$

2) Если c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) — последовательность чисел, для которой $\|c\|_p < +\infty$, то существует такая $f(t) \in L^q(0, 1)$, для которой удовлетворено условие (4.1) и

$$\|f\|_q \leq \|c\|_p. \quad (4.3)$$

Эта теорема есть частный случай более общего результата Ф. Рисса:

Теорема Ф. Рисса. Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — нормированная ортогональная система, состоящая из функций, ограниченных в своей совокупности

$$|\varphi_n(t)| \leq M, \quad \begin{matrix} a \leq t \leq b, \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (4.4)$$

1) Если $f \in L^p(a, b)$, то коэффициенты Фурье

$$c_n = \int_a^b f \bar{\varphi}_n dt \quad (4.5)$$

от $f(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$ удовлетворяют условию

$$\|c\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|f\|_p. \quad (4.6)$$

2) Если для последовательности чисел c_n имеем $\|c\|_p < +\infty$, то существует функция $f(t) \in L^q(a, b)$, удовлетворяющая (4.5) для всех n и такая, что

$$\|f\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|c\|_p. \quad (4.7)$$

Существует несколько доказательств этой теоремы*). Мы дадим здесь доказательство, принадлежащее Зигмунду и Кальдерону (см. Calderon and Zygmund^[1]) и построенное на применении принципа Фрагмена—Линделефа (см. Добавления, § 1).

Доказательство теоремы Ф. Рисса. Мы начинаем с первой части теоремы и прежде всего заметим, что, не нарушая общности, можно сделать следующие предположения:

- а) система $\{\varphi_n\}$ состоит из конечного числа функций,
- б) функция f ступенчатая,
- в) $\|f\|_p = 1$.

Действительно, мы можем всегда подобрать ступенчатую функцию $f^*(t)$ так, чтобы $\|f - f^*\|_p < \varepsilon$; обозначая через c_n^* ее коэффициенты Фурье, получаем из (4.5) по неравенству Гельдера (см. Вводный материал, § 9)

$$\begin{aligned} |c_n - c_n^*| &\leq \|f - f^*\|_p \|\varphi_n\|_q \leq \varepsilon \left(\int_a^b |\varphi_n|^{q-2} |\varphi_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \varepsilon M^{\frac{q-2}{q}} \left(\int_a^b |\varphi_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \varepsilon M^{1-\frac{2}{q}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Так как мы предположили, что система $\{\varphi_n(x)\}$ состоит из конечного числа функций, то отсюда следует справедливость неравенства (4.6) в общем случае, если оно было доказано только для ступенчатых функций.

Далее, если неравенство (4.5) доказано для любого конечного числа функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, то, переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, видим, что оно остается справедливым.

Наконец, законность гипотезы в) следует из того, что при умножении f на константу обе части неравенства (4.5) умножаются на эту же константу.

Итак, ни одно из сделанных предположений не нарушает общности доказываемой теоремы.

Заметим теперь, что всегда можно подобрать числа d_n так, чтобы

$$\|c\|_q = \sum c_n d_n, \quad (4.9)$$

причем $\|d\|_p = 1$. Действительно, для этого достаточно принять, например,

$$d_n = |c_n|^{q-1} \frac{e^{-i \arg c_n}}{\|c\|_q^{q-1}}$$

(равенство (4.9) тогда получается мгновенно, а

$$\|d\|_p^p = \frac{\sum |c_n|^{p(q-1)}}{(\|c\|_q^{q-1})^p} = \frac{\sum |c_n|^q}{\sum |c_n|^q} = 1,$$

ибо $p(q-1) = q$).

Положим

$$d_n = D_n^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n, \quad \text{где } |\varepsilon_n| = 1, \text{ а } D_n \geq 0,$$

тогда

$$\sum D_n = 1. \quad (4.10)$$

Кроме того, положим

$$f(t) = F^{\frac{1}{p}}(t) \eta(t), \quad \text{где } F(t) \geq 0, \text{ а } |\eta(t)| = 1,$$

*) Доказательство, принадлежащее Риссу, можно найти в книге Качмажа и Штейнгауза [М. 7].

тогда в силу $\|f\|_p = 1$ имеем

$$\int_a^b F(t) dt = 1. \quad (4.11)$$

Мы можем теперь выразить коэффициенты c_n так:

$$c_n = \int_a^b F^{\frac{1}{p}}(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt$$

и, принимая во внимание (4.9),

$$\|c\|_q = \sum D_n^{\frac{1}{p}} \varepsilon_n \int_a^b F^{\frac{1}{p}}(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt.$$

Если мы теперь заменим $\frac{1}{p}$ через z , т. е. рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \sum D_n^z \varepsilon_n \int_a^b F^z(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt, \quad (4.12)$$

то каждый из интегралов в правой части равенства (4.12) (в силу того, что f — ступенчатая) есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами выражений вида λ^z , где все λ положительны. Но тогда и $\Phi(z)$ есть такая же линейная комбинация, а потому она ограничена в любой вертикальной полосе плоскости z .

Оценим верхнюю грань $\Phi(z)$ на прямых $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$. Для $x = 1$ из (4.10) и (4.11) находим

$$|\Phi(z)| \leq \sum D_n |\varepsilon_n| \int_a^b F |\varphi_n| dt \leq M \sum D_n \int_a^b F dt = M.$$

Для $z = \frac{1}{2} + iy$, применяя неравенства Буняковского к правой части (4.12), найдем

$$|\Phi| \leq (\sum D_n)^{\frac{1}{2}} (\sum |\int_a^b F^{\frac{1}{2}+iy}(t) \eta(t) \bar{\varphi}_n(t) dt|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

В силу неравенства Бесселя, так как интегралы в правой части неравенства (4.13) являются коэффициентами Фурье от $F^{\frac{1}{2}+iy}(t) \eta(t)$, имеем

$$|\Phi| \leq (\sum D_n)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b F dt)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Итак, $|\Phi(z)| \leq M$ на $x = 1$ и $|\Phi(z)| \leq 1$ на $x = \frac{1}{2}$. Если мы хотим применить вторую форму принципа Фрагмена—Линделёфа (см. Добавления, § 1) для оценки $\Phi(z)$ в полосе $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, то надо подобрать линейную функцию $L(t)$ так, чтобы она равнялась 0 при $t = 1$ и равнялась 1 при $t = \frac{1}{2}$. Такой функцией будет $L(t) = 2(1 - t)$. Полагая $M_1 = 1$ и $M_2 = M$, находим тогда $|\Phi(x_0 + iy_0)| \leq 1^{2(1-x_0)} M^{1-2(1-x_0)}$ для $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$, $-\infty < y_0 < \infty$;

отсюда, так как

$$\|c\|_q = \Phi\left(\frac{1}{p}\right),$$

находим

$$\|c\|_q \leqslant 1^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)} M_p^{2-p} = M_p^{2-p},$$

а это и заканчивает доказательство первой половины теоремы.

Для доказательства второй половины фиксируем число N и положим

$$f_N(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_N \varphi_N(t),$$

где $\{c_n\}$ — заданная последовательность чисел.

Так как $|\varphi_n| \leqslant M$, то $\varphi_n \in L^q$, значит и $f_N \in L^q$. Мы всегда можем выбрать $g(t)$ так, чтобы $\|g\|_p = 1$ и

$$\|f_N\|_q = \int_a^b \bar{f}_N g \, dt. \quad (4.14)$$

Действительно, для этого достаточно положить хотя бы

$$g(t) = |f_N(t)|^{q-1} \frac{e^{i \arg f_N(t)}}{\|f_N\|_q^{q-1}},$$

так как тогда (4.14) следует из того, что

$$\int_a^b \bar{f}_N g \, dt = \frac{\int_a^b \bar{f}_N |f_N|^{q-1} e^{i \arg f_N(t)} \, dt}{\left\{ \int_a^b |f_N|^q \, dt \right\}^{\frac{q-1}{q}}} = \frac{\int_a^b |f_N|^q \, dt}{\left\{ \int_a^b |f_N|^q \, dt \right\}^{\frac{q-1}{q}}} = \|f_N\|_q$$

и при этом

$$\|g\|_p^p = \int_a^b |g|^p \, dt = \frac{\int_a^b |\bar{f}_N|^{p(q-1)} \, dt}{\left(\int_a^b |f_N|^q \, dt \right)^{\frac{p(q-1)}{q}}} = \frac{\int_a^b |f_N|^q \, dt}{\int_a^b |f_N|^q \, dt} = 1.$$

Обозначая через d_n коэффициенты Фурье от $g(t)$, получаем

$$\|f_N\|_q = \int_a^b \bar{f}_N g \, dt = \sum \bar{c}_n d_n \leqslant \left(\sum_1^N |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^N |d_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Но на основании первой половины теоремы мы имеем

$$\left(\sum |d_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M_p^{2-p} \|g\|_p = M_p^{2-p},$$

а потому

$$\|f_N\|_q \leqslant M_p^{2-p} \left(\sum_1^N |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.15)$$

Раз так, то

$$\|f_{N+k} - f_N\|_q \leqslant M_p^{2-p} \left(\sum_{N+1}^{N+k} |c_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

при любом k , откуда следует, что $\{f_N\}$ сходится по норме пространства L^q . Значит (см. Вводный материал, § 21), найдется такая $f \in L^q$, что $\|f - f_N\|_q \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$; тогда, заставляя $N \rightarrow \infty$, мы из (4.15) получим

$$\|f\|_q \leq M^{\frac{2}{p}-1} \|c\|_p$$

и остается только доказать, что числа c_n являются коэффициентами Фурье от f , чтобы теорема была полностью доказана.

Но так как

$$\left| \int_a^b (f_N - f) \bar{\varphi}_n dt \right| \leq \|f_N - f\|_q \|\bar{\varphi}_n\|_p \leq M(b-a)^{\frac{1}{p}} \|f - f_N\|_q \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, то

$$c_n = \int_a^b f \bar{\varphi}_n dt,$$

и доказательство закончено*).

З а м е ч а н и е 1. Мы здесь не изучаем вопроса о том, когда неравенства в теореме Ф. Рисса обращаются в равенства. Отсылаем интересующихся к работе Зигмунда и Кальдерона.

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы Рисса существенно использовалось предположение, что $p > 1$. Однако сама теорема Рисса, а следовательно и теорема Хаусдорфа—Юнга, остается справедливой и при $p = 1$. В этом случае $q = \infty$, и если условиться считать (см. Вводный материал, § 9)

$$\|f\|_\infty = \sup |f|$$

и аналогично принять

$$\|c\|_\infty = \max_n |c_n|,$$

то оба утверждения теоремы Рисса оказываются верны, в чем можно мгновенно убедиться.

З а м е ч а н и е 3. В доказанной теореме Рисса, как в утверждении 1), так и в утверждении 2), предполагалось $p \leq 2$ и тем самым $q \geq 2$. Таким образом из суммируемости $|f|^p$ мы заключали о сходимости $\sum |c_n|^q$ при $p \leq 2$, а также из сходимости $\sum |c_n|^p$ делали вывод о суммируемости $|f|^q$ при $p \leq 2$.

Мы хотим показать, что оба утверждения перестают быть верными, если числа p и q поменять местами, иначе говоря, если считать $p > 2$. В этом можно убедиться на примерах. Мы рассмотрим случай тригонометрической системы.

Действительно, если бы утверждение 1) было верно и для $p > 2$, то, так как непрерывная функция суммируема в любой степени p , можно было бы утверждать, что для такой функции сходится ряд

$$\sum |a_n|^q + |b_n|^q,$$

считая q как угодно близким к 1. А между тем в главе IV, § 14 мы покажем, что можно построить такую непрерывную функцию, для которой при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum |a_n|^{2-\varepsilon} + |b_n|^{2-\varepsilon} = +\infty.$$

*) Обращаем внимание читателей на работу Marcinkiewicz and Zygmund [4], где дается некоторое обобщение этой теоремы.

Точно так же и утверждение 2) перестает быть верным при $p > 2$. Действительно, если мы рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2^n x}{\sqrt[n]{n}},$$

то

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p < +\infty$$

для любого $p > 2$.

Следовательно, если бы утверждение 2) при $p > 2$ было верным, то рассматриваемый ряд был бы рядом Фурье от $f(x) \in L^q$. А между тем в главе XI, § 3 мы убедились, что этот ряд не может быть рядом Фурье, так как там будет доказано, что лакунарный ряд является рядом Фурье только при условии сходимости ряда из квадратов его коэффициентов, а в нашем случае этот ряд расходится.

Укажем один простой факт, вытекающий из теоремы Хаусдорфа—Юнга.

С л е д с т в и е. Если $f(x) \in L^p$, $p > 1$, то оба ряда

$$\sum \left| \frac{a_n}{n} \right| \quad \text{и} \quad \sum \left| \frac{b_n}{n} \right|$$

сходятся.

Действительно, если $p \geq 2$, то $f \in L^p$ влечет $f \in L^2$, а тогда достаточно заметить, что

$$\left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$$

и аналогично для b_n .

Если же $1 < p \leq 2$, то по теореме Хаусдорфа—Юнга должен сходиться ряд $\sum |a_n|^q + |b_n|^q$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Но тогда для любого m

$$\sum_{n=1}^m \left| \frac{a_n}{n} \right| \leq \left(\sum_{n=1}^m |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

где C постоянно, так как $\sum \left(\frac{1}{n} \right)^p < +\infty$ при $p > 1$. Значит, $\sum \left| \frac{a_n}{n} \right| < +\infty$;

рассуждение для $\sum \frac{b_n}{n}$ совершенно такое же.

Из доказанной теоремы, в частности, следует сходимость рядов

$$\sum \frac{a_n}{n} \quad \text{и} \quad \sum \frac{b_n}{n}$$

при $f(x) \in L^p$. Что касается второго из этих рядов, то он сходится и при $f(x) \in L$ (см. глава I, § 40), но для первого, если $p = 1$, это уже неверно. Действительно, в главе I, § 30 мы доказали, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$$

есть ряд Фурье, а между тем $\sum \frac{1}{n \ln n} = +\infty$.

Укажем, что Харди и Литтлвуд (Hardy and Littlewood^[5]) нашли необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на $f(x)$, чтобы ряд $\sum \frac{a_n}{n}$ был сходящимся, а также доказали, что если они выполнены, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx.$$

Что касается суммы ряда $\sum \frac{b_n}{n}$, то легко доказать равенство

$$\sum \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x) dx.$$

Эта формула получается применением равенства Парсеваля к функции $f(x)$ и функции

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

(см. гл. I, § 41), причем применение равенства законно, как будет доказано в § 5, так как эта функция с ограниченным изменением.

Заканчивая этот параграф, посвященный связи между степенью суммируемости функции и ее коэффициентами Фурье, мы укажем без доказательства еще две теоремы Пэли (см. Paley^[11]).

Введем следующие обозначения: если c_1, c_2, \dots — любая последовательность чисел (действительных или комплексных), то будем обозначать через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ числа $|c_1|, |c_2|, \dots, |c_n|, \dots$, расположенные в порядке убывания; если несколько чисел $|c_n|$ равны между собой, то в последовательности γ_n будет соответствующее количество повторяющихся членов.

Имеют место следующие теоремы:

Теоремы Пэли. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортогональная нормированная система на $[a, b]$ и $|\varphi_n(x)| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), $a \leq x \leq b$.

1) Если $1 < p \leq 2$, $f(x) \in L^p$ и $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — ее коэффициенты Фурье по системе $\varphi_n(x)$, то

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^p n^{p-2} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_a^b |f|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

где A_p зависит только от p и M .

2) Если $q \geq 2$ и $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — последовательность чисел, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q n^{q-2} < +\infty,$$

то существует функция $f(x) \in L^q(a, b)$, для которой числа c_n являются коэффициентами Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$ и

$$\left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq B_q \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^q n^{q-2} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где B_q зависит только от q и M .

Доказательства этих теорем, кроме работы автора, можно найти и в книге Зигмунда [М. 6] (см. § 9.4).

Близкому с этими результатами вопросу посвящена и работа Литтльвуда (Littlewood [5]).

Наконец, необходимо отметить теоремы Харди и Литтльвуда, относящиеся к вопросу о связи между степенью суммируемости функции и ее коэффициентами Фурье (см. также Зигмунд [М. 6] § 9.5). Некоторые частные случаи их результатов разобраны нами в § 3 главы X.

§ 5. Обобщение равенства Парсеваля для произведения двух функций

Мы видели в главе I, § 18, что если $f(x) \in L^2$ и $\varphi(x) \in L^2$, причем a_n и b_n — коэффициенты Фурье для $f(x)$, a_n и β_n — для $\varphi(x)$, то имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n). \quad (5.1)$$

Докажем, что формула сохраняет силу, если $f \in L^p$, $\varphi \in L^q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p > 1$). Мы уже знаем (см. Вводный материал, § 9), что в этом случае произведение $f(x) \varphi(x)$ суммируемо.

Обозначим через $S_n(x)$ частную сумму ряда Фурье для $f(x)$. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right\} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k + b_k \beta_k. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x) \varphi(x) dx$$

или, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - S_n(x)] dx = 0.$$

Но в главе VIII, § 20 будет доказано, что при $p > 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

если $f(x) \in L^p$. Если так, то по неравенству Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|f(x) - S_n(x)\|_p \|\varphi(x)\|_q \rightarrow 0,$$

поскольку $\varphi(x) \in L^q$.

Пользуясь этим равенством, можем получить следующий критерий для того, чтобы некоторый ряд был рядом Фурье от $f(x) \in L^p$.

Т е о р е м а. *Для того чтобы ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (5.2)$$

был рядом Фурье от функции $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), необходимо и достаточно чтобы для каждой функции $\varphi(x) \in L^q$ с коэффициентами α_n, β_n ряд

$$\frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n + b_n \beta_n \quad (5.3)$$

был сходящимся.

У с л о в и е н е о б х о д и м о. Это было только что доказано. Мы даже показали, что сумма этого ряда есть

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx.$$

У с л о в и е д о с т а т о ч н о. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \in L^q$ с рядом

$$\sigma(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \quad (5.4)$$

Обозначим через $\sigma_n(x)$ и τ_n соответственно средние (С, 1) для рядов (5.2) и (5.3). Ясно, что

$$\tau_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sigma_n(t) dt.$$

Но $\tau_n = \tau_n(\varphi)$ — линейный функционал в L^q , потому что $\sigma_n(t)$, как тригонометрический полином, принадлежит L^p при любом p , норма этого функционала есть $\frac{1}{\pi} \|\sigma_n\|_p$ (см. Вводный материал, § 20).

Так как ряд (5.3) сходится, значит тем более (С, 1) суммируем, то числа $\tau_n(\varphi)$ ограничены для каждой $\varphi \in L_q$, т. е.

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sigma_n(t) dt \right| \leq M(\varphi) < +\infty,$$

где M — константа, зависящая от φ (но не от n).

Следовательно, $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \tau_n(\varphi) < +\infty$. Поэтому на основании теоремы Банаха—Штейнгауза (см. Добавления, § 4) нормы функционалов $\tau_n(\varphi)$ ограничены, т. е.

$$\|\sigma_n\|_p \leq K \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда по теореме 3 § 60 главы I следует, что ряд (5.2) есть ряд Фурье от некоторой $f \in L^p$, и доказательство закончено.

Вернемся к равенству Парсеваля и докажем теорему:

Равенство Парсеваля сохраняет силу, если $f(x)$ имеет ограниченное изменение, а $\varphi(x) \in L$.

Действительно, в этом случае и $f(x)$ ограничена, и функции $S_n(x)$ ограничены в совокупности, а потому произведение $\varphi(x) [f(x) - S_n(x)]$ мажорируется суммируемой функцией. С другой стороны, $S_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду. На основании теоремы Лебега о законности перехода к пределу под знаком интеграла имеем тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - S_n(x)] dx = 0,$$

и доказательство заканчивается как в предыдущем случае.

Это рассуждение уже не годится, если $f(x)$ только ограничена, но не с ограниченным изменением. Однако и в этом случае, т. е. при $\varphi(x) \in L$ и $f(x)$ — ограниченной, равенство Парсеваля справедливо, если только вместо сходимости ряда, стоящего в правой части, рассматривать его $(C, 1)$ суммируемость.

Действительно, пусть $\sigma_n(x)$ — фейеровские суммы ряда Фурье от $f(x)$. Тогда $\sigma_n(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду и $|\sigma_n(x) - f(x)| \leq M$, а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) [f(x) - \sigma_n(x)] dx = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sigma_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} dx = \\ &= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) [a_k \alpha_k + b_k \beta_k] \end{aligned}$$

и правая часть этого равенства есть не что иное, как n -я чезаровская сумма для ряда (5.3). Поэтому нужное утверждение доказано.

Возвращаясь к случаю, когда $f(x)$ имеет ограниченное изменение, выведем одну теорему, которая часто бывает полезной.

Всякий ряд Фурье после умножения на любую функцию с ограниченным изменением можно интегрировать почленно по любому отрезку, т. е. если $\varphi(x)$ с ограниченным изменением и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

то

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_a^b \varphi(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi(x) \cos nx dx + b_n \int_a^b \varphi(x) \sin nx dx. \quad (5.5)$$

Прежде всего заметим, что достаточно доказывать формулу (5.5) для случая $[a, b] \equiv [0, 2\pi]$. В самом деле, если $0 < a < b < 2\pi$, то достаточно считать $\varphi(x) = 0$ вне (a, b) , и тогда можно производить интегрирование по отрезку $[0, 2\pi]$; если же длина отрезка $[a, b]$ превосходит 2π , то его можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых формула уже доказана.

Итак, достаточно доказать, что

$$\int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx + \sum a_n \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx dx + \sum b_n \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx. \quad (5.6)$$

После умножения обеих частей (5.6) на $\frac{1}{\pi}$, мы видим, что эта формула превращается в равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \alpha_0 + \sum a_n \alpha_n + b_n \beta_n,$$

справедливость которого для $f(x) \in L$ и $\varphi(x)$ с ограниченным изменением уже была доказана*).

§ 6. О скорости стремления к нулю коэффициентов Фурье от суммируемых функций

Поставим вопрос так: можно ли найти такую функцию $\lambda(n) \uparrow \infty$, что для любой суммируемой функции имеем

$$a_n = o\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right). \quad (6.1)$$

Оказывается, что на этот вопрос приходится дать отрицательный ответ; более того, можно для любой $\lambda(n) \uparrow \infty$ построить непрерывную $f(x)$, у которой коэффициенты Фурье не удовлетворяют соотношению (6.1). В самом деле, выберем числа n_k так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < +\infty$$

и положим $a_{n_k} = \frac{1}{\lambda(n_k)}$, $b_{n_k} = \frac{1}{\lambda(n_k)}$; $a_n = b_n = 0$, если $n \neq n_k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Тогда ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum \frac{1}{\lambda(n_k)} [\cos n_k x + \sin n_k x]$$

есть ряд Фурье от непрерывной функции, поскольку он сходится абсолютно и равномерно, но в то же время соотношения (6.1) не имеют места, так как

$$a_{n_k} \lambda(n_k) = 1 \quad \text{и} \quad b_{n_k} \lambda(n_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Итак, даже для непрерывных функций нельзя утверждать, что коэффициенты Фурье обязаны стремиться к нулю с некоторой определенной «скоростью».

Однако, если $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то мы видели (§ 5), что при $p \leq 2$ имеем $\sum |a_n|^q + |b_n|^q < +\infty$, а при $p > 2$ уже во всяком случае $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2 < +\infty$, т. е. все таки a_n и b_n не могут быть «слишком велики» для больших значений n .

Иначе обстоит дело для случая $f(x) \in L$, а именно:

Если $f(x)$ только суммируема, то ее коэффициенты Фурье могут стремиться к нулю как угодно медленно. Точнее:

*) Можно вместо ограниченности изменения накладывать на $f(x)$ другие ограничения. Так, например, равенство Парсеваля сохраняет силу, если $\varphi(x) \in L$, $f(x)$ ограничена, и, кроме того, $\int_0^h [f(x+u) - f(x-u)] du = o\left(\frac{h}{\ln \frac{1}{h}}\right)$ равномерно относительно x (см. Izumi and Sato [1]).

Если $\varepsilon_n \downarrow 0$ как угодно медленно, то можно найти такой ряд Фурье вида

$$\sum a_n \cos nx,$$

у которого $a_n \geq \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Это будет показано в § 2 главы X.

Банах (Banach^[1]) отметил также, что можно построить последовательность положительных λ_n , стремящихся к $+\infty$, и суммируемую $f(x)$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n}) = +\infty.$$

Можно ли все же указать какие-либо *необходимые* условия для коэффициентов Фурье от суммируемой функции?

Здесь мы только напомним, что ряд $\sum \frac{b_n}{n}$ должен сходиться (см. глава I, § 40), но для $\sum \frac{a_n}{n}$ это уже неверно (см. § 4); таким образом, коэффициенты a_n и b_n не равноправны. В главе VIII мы увидим, что ряд, сопряженный к ряду Фурье, не должен быть рядом Фурье. К вопросу о необходимых условиях мы вернемся в § 9 настоящей главы. А сейчас поставим вопрос о *достаточных* условиях. К сожалению, и здесь приходится говорить почти только об отрицательных фактах.

Известно, что условие $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < +\infty$ является достаточным. Но, как отметил Орлич (Orlicz^[1]), можно найти последовательность положительных чисел γ_n , $\gamma_n \rightarrow 2$, при $n \rightarrow \infty$, такую, что ряд

$$\sum (|a_n|^{\gamma_n} + |b_n|^{\gamma_n}) < +\infty,$$

однако $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ не есть ряд Фурье.

Далее заметим, что никакое условие вида

$$a_n = O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right),$$

где $\lambda(n) \uparrow \infty$, не может оказаться достаточным для того, чтобы ряд $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ оказался рядом Фурье. В этом мы убедимся в § 8.

Далее напомним, что в § 4 настоящей главы было отмечено: никакое условие вида

$$\sum |a_n|^q + |b_n|^q < +\infty,$$

где $q > 2$, не является достаточным для того, чтобы ряд $\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ был рядом Фурье.

Обратим еще внимание на следующий факт: если в ряде Фурье некоторые коэффициенты заменить нулями, то он может перестать быть рядом Фурье. Действительно, пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$, тогда ряд $\sum a_n \cos nx$ является рядом Фурье (см. § 30 главы I). Теперь заменим нулями все a_n , для которых $n \neq 2^k$ ($k = 1, 2, \dots$). Получим ряд $\sum a_{2^k} \cos 2^k x$, который будет лакунарным; если бы он был рядом Фурье, то (см. глава XI, § 3) мы должны были бы иметь $\sum (a_{2^k})^2 < +\infty$, а между тем

$$\sum (a_{2^k})^2 \geq \sum \frac{1}{k \ln 2} = +\infty.$$

Это и доказывает наше утверждение.

В § 8 мы укажем большие трудности на пути к решению вопроса о достаточных условиях для коэффициентов Фурье. Но для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные теоремы.

§ 7. Вспомогательные теоремы о системе Радемахера

В § 9 главы I было дано определение функций Радемахера. Сейчас мы докажем несколько теорем, касающихся этих функций, и применим их затем к изучению тригонометрических рядов.

Теорема 1*). Если $\sum c_n^2 < +\infty$, то ряд

$$\sum c_n \varphi_n(t), \quad (7.1)$$

где $\varphi_n(t)$ есть n -я функция Радемахера, сходится почти всюду.

В самом деле, из $\sum c_n^2 < +\infty$ следует, что ряд (7.1) есть ряд Фурье от некоторой $f(x) \in L^2$, для которой

$$\int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда при помощи неравенства Буняковского выводим

$$\int_0^1 |f(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0.$$

Пусть (a, b) — любой интервал на $[0, 1]$; тогда

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - f(x)| dx \leq \int_0^1 |S_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0,$$

т. е.

$$\int_a^b S_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.2)$$

Теперь обозначим через $F(t)$ неопределенный интеграл от $f(t)$, тогда $F'(t) = f(t)$ всюду, кроме некоторого множества E , $mE = 0$. Пусть \mathcal{E} — получается из E добавлением всех точек t вида $t = \frac{p}{2^k}$, где p и k — любые целые; снова $m\mathcal{E} = 0$. Докажем, что ряд (7.1) сходится всюду вне \mathcal{E} . Действительно, пусть $t \notin \mathcal{E}$. Тогда $t \in \left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$, где k — какое-то целое и p принимает одно из значений $0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$.

Для любого $j \geq k$ на интервале $I = \left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$ имеем

$$\int_I \varphi_j(x) dx = 0,$$

поэтому

$$\int_I S_n(x) dx = \int_I S_{k-1}(x) dx \quad (n > k)$$

и в силу (7.2) отсюда $\int_I f(x) dx = \int_I S_{k-1}(x) dx$. Но $S_{k-1}(x)$ постоянна на I а потому

$$S_{k-1}(t) = \frac{1}{I} \int_I S_{k-1}(x) dx = \frac{1}{I} \int_I f(x) dx. \quad (7.3)$$

*) См. Rademacher [1], а также Paley and Zygmund [1], Колмогоров [4].

Если $k \rightarrow \infty$, то длина интервала I стремится к нулю и поскольку $t \in E$, то правая часть (7.3) стремится к $f(t)$, а значит

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1}(t) = f(t),$$

а это и заканчивает доказательство теоремы.

Теорема 2 (Zygmund^[7]). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (7.4)$$

где $\varphi_n(t)$ — функция Радемахера, суммируется методом $(C, 1)$ на множестве E , $mE > 0$, то $\sum c_n^2 < +\infty$.

Доказательство. Имеем для n -й чезаровской суммы ряда

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) c_k \varphi_k(t) \quad (7.5)$$

и по условию $\sigma_n(t)$ сходится на E , $mE > 0$. Значит, найдется такое \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, где $\sigma_n(t)$ сходится равномерно к $\sigma(t)$ и $\sigma(t)$ непрерывна. Поэтому для достаточно большого N имеем при $n > N$, например,

$$|\sigma_n(t)| < |\sigma(t)| + 1, \quad t \in \mathcal{E},$$

т. е. найдется такое M , что

$$|\sigma_n(t)| < M \quad \text{для } n > N \text{ и } t \in \mathcal{E},$$

и, следовательно, найдется такое M_1 , что

$$|\sigma_n(t)| < M_1 \quad \text{для } t \in \mathcal{E} \text{ и } n = 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

Отсюда

$$\int_{\mathcal{E}} \sigma_n^2(t) dt < M_1^2 m\mathcal{E} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7.7)$$

Значит,

$$M_1^2 m\mathcal{E} \geq \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \int_{\mathcal{E}} \varphi_k^2(t) dt + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) c_k c_j \int_{\mathcal{E}} \varphi_k \varphi_j dt. \quad (7.8)$$

Из определения функций Радемахера легко вывести, что система $\{\varphi_k(x) \varphi_j(x)\}$, где $k \neq j$, также ортогональна. Числа

$$b_{kj} = \int_{\mathcal{E}} \varphi_k(t) \varphi_j(t) dt$$

суть коэффициенты Фурье по этой системе от функции $f(x)$, характеристической для множества \mathcal{E} (т. е. $f(x) = 1$ на \mathcal{E} и $f(x) = 0$ на $C\mathcal{E}$). Значит, $\sum \sum b_{kj}^2 < +\infty$. При рассмотрении суммируемости ряда (7.5) методом $(C, 1)$, а также сходимости ряда $\sum c_n^2$ конечное число первых членов не играет роли, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что для некоторого N_1 имеем $c_n = 0$ для $n \leq N_1$.

Это число N_1 можно предположить столь большим, что

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \sum_{\substack{j=N_1+1 \\ (k \neq j)}}^{\infty} b_{kj}^2 < \left(\frac{m\mathcal{E}}{2}\right)^2. \quad (7.9)$$

Из-за выбрасывания членов в сумме $\sigma_n(t)$ (т. е. предположения $c_1 = c_2 = \dots = c_{N_1} = 0$) константу M_1 в формуле (7.6), может быть, придется изменить на некоторую M_2 .

Применяя к последней сумме в неравенстве (7.8) неравенство Буняковского и учитывая (7.9), получаем

$$\left| \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (k \neq j)}}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(1 - \frac{j}{n}\right) c_k c_j \int_{\mathcal{E}} \varphi_k \varphi_j dt \right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 c_j^2 \left(\frac{m\mathcal{E}}{2}\right)^2} = \frac{m\mathcal{E}}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2,$$

поэтому, замечая еще, что $\varphi_n^2(t) = 1$ почти всюду для любого n , найдем из (7.8)

$$M_2^2 m \mathcal{E} \geqslant \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 m \mathcal{E} - \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \frac{m\mathcal{E}}{2} = \frac{m\mathcal{E}}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 c_k^2 \leqslant 2 M_2^2$$

при любом n . Пусть N_2 произвольно.

Если $N_3 > N_2$, то

$$\sum_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{k}{N_3}\right)^2 c_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{N_2} \left(1 - \frac{k}{N_3}\right)^2 c_k^2 \leqslant 2 M_2^2.$$

Но N_3 можно взять как угодно большим; отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{N_2} c_k^2 \leqslant 2 M_2^2,$$

а так как N_2 любое, то $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорему 2 можно несколько усилить, а именно высказать ее в такой форме:

Если для ряда $\sum c_n \varphi_n(t)$ цезаровские суммы удовлетворяют условию

$$|\sigma_n(t)| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.10)$$

на некотором \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, то $\sum c_n^2 < +\infty$.

Действительно, при доказательстве теоремы 2 мы сначала обнаружили существование множества положительной меры, где выполнено условие (7.10), а дальше опирались только на этот факт.

З а м е ч а н и е 2. Мы для упрощения доказательства проводили рассуждение с методом $(C, 1)$. На самом деле справедлива гораздо более общая теорема.

Т е о р е м а. Если ряд $\sum c_n \varphi_n(t)$ суммируем каким-либо методом T , или даже T^* на множестве меры больше нуля, то $\sum c_n^2 < +\infty$.*

Для случая сходимости эта теорема была доказана Колмогоровым и Хинчиным [1].

* О методах T и T^* см. § 5 Вводного материала.

§ 8. Отсутствие критериев, налагаемых на модули коэффициентов

Мы хотим показать, что если не заботиться о знаках чисел a_n и b_n , а учитывать только их модули, то никакое условие, кроме $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, не достаточно для того, чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

оказался рядом Фурье. Впервые этот факт был обнаружен Литтльвудом (Littlewood^[1]), показавшим, что если ряд $\sum \varrho_n^2$ расходится ($\varrho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$), то можно так подобрать числа a_n , что ряд

$$\sum \varrho_n \cos (nx - a_n)$$

не будет рядом Фурье. Затем Сидон (Szidon^[5]) дал такое усиление теоремы Литтльвуда:

Если все ряды

$$\pm \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (8.1)$$

где знаки $+$ и $-$ можно выбирать как угодно, являются рядами Фурье, то $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$.

Другими словами, если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то можно всегда так подобрать знаки $+$ или $-$, чтобы получить среди рядов (8.1) такой, который не является рядом Фурье.

Этот результат в свою очередь содержится в гораздо более сильном результате Зигмунда. Для того чтобы его сформулировать, введем в рассмотрение функции Радемахера. Положим

$$A_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm A_n(x). \quad (8.2)$$

Если мы исключим из рассмотрения все те случаи, когда либо $+1$, либо -1 в качестве множителя у $A_n(x)$ встречается лишь конечное число раз, то выкинем лишь счетное множество рядов вида (8.2). Все остальные ряды могут быть записаны в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \varphi_n(t), \quad (8.3)$$

где $\varphi_n(t)$ есть n -я функция Радемахера, а t — некоторое число на интервале $(0, 1)$, причем $t \neq \frac{p}{2^q}$, где p и q — целые. В самом деле, для любого $t \neq \frac{p}{2^q}$ имеем $\varphi_n(t) = +1$ или $\varphi_n(t) = -1$ при любом n и, значит, ряд (8.3) принимает форму (8.2); обратно, если дан ряд (8.2) и в нем знаки $+$ и $-$ встречаются бесконечное множество раз, то, как легко видеть, найдется одно вполне определенное $t_0 \neq \frac{p}{2^q}$, для которого $\varphi_n(t_0) = +1$ или $\varphi_n(t_0) = -1$ и принимает именно такой знак, который стоит у $A_n(x)$.

Условимся говорить, что почти все ряды вида (8.2) обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают ряды (8.3) для почти всех значений t на интервале $(0, 1)$.

Приняв эту формулировку, мы можем теорему Зигмунда сформулировать так:

Теорема 1*). Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \infty$, то почти все ряды

$$\pm \frac{a_0}{2} + \sum' \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

не суммируемы $(C, 1)$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ и, следовательно, не являются рядами Фурье.

Эта теорема действительно с избытком покрывает выше сформулированную теорему Сидона.

В свою очередь, она может быть получена из теоремы 2 § 7. В самом деле, допустим, что $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$. Докажем сначала, что тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x) = +\infty$$

для почти всех значений x .

Действительно, допустим, что это неверно. Тогда найдется такое E , $mE > 0$, что $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x)$ сходится на E . Можно тогда выбрать внутри E такое \mathcal{E} , $m\mathcal{E} > 0$, на котором сумма $\sum A_n^2(x)$ ограничена. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x) < M \quad \text{на } \mathcal{E}.$$

Полагая $A_n(x) = \varrho_n \cos(nx + \alpha_n)$, можем интегрировать ряд $\sum A_n^2(x)$ по-членно по множеству \mathcal{E} ; тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n^2 \int_{\mathcal{E}} \cos^2(nx + \alpha_n) dx < M m\mathcal{E}. \quad (8.4)$$

Но

$$\int_{\mathcal{E}} \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} [1 + \cos 2(nx + \alpha_n)] dx \rightarrow \frac{1}{2} m\mathcal{E}$$

при $n \rightarrow \infty$; значит, для достаточно большого N каждый член ряда в левой части (8.4) при $n \geq N$ превосходит $\varrho_n^2 a$, где $a > 0$, поэтому

$$\sum \varrho_n^2 < +\infty,$$

а это противоречит гипотезе $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$.

Итак, мы убедились, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то $\sum A_n^2(x) = +\infty$ для почти всех значений x .

Теперь обозначим через E плоское множество точек (x, t) , обладающих таким свойством: если $(x_0, t_0) \in E$, то ряд

$$\sum A_n(x_0) \varphi_n(t_0)$$

суммируется методом $(C, 1)$, т. е. соответствующий ряд

$$\sum \pm A_n(x_0)$$

суммируется методом Фейера. Докажем, что $mE = 0$.

) Зигмунд доказал более общую теорему, а именно несуммируемость этих рядов любым методом T^ . Однако, поскольку мы в доказательстве опираемся на теорему 2 § 7, а она была доказана лишь для метода $(C, 1)$, то и здесь мы получаем более слабый результат.

Действительно, $\sum A_n^2(x_0) = +\infty$ для почти всех x . Пусть \mathcal{E} — множество тех x , для которых это имеет место, тогда $m\mathcal{E} = 2\pi$. Если $x_0 \in \mathcal{E}$, то по предыдущей теореме Зигмунда множество тех t , для которых $\sum A_n(x_0) \varphi_n(t)$ суммируется методом $(C, 1)$, имеет меру нуль. Значит, множество точек $(x_0, t) \in E$ имеет меру нуль, и это верно для всех $x_0 \in \mathcal{E}$. Следовательно, для почти всех x_0 на $[0, 2\pi]$ вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает E по множеству меры нуль. Но тогда по теореме Фубини (см. Вводный материал, § 18) имеем $mE = 0$. Если так, то, снова по теореме Фубини, почти всякая горизонтальная прямая пересекает E по множеству меры нуль, т. е. для почти всех t_0 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \varphi_n(t_0)$ может суммироваться методом $(C, 1)$ лишь для множества

точек, имеющего меру нуль. Но это значит, что «почти все ряды» $\sum \pm A_n(x)$ суммируются методом Фейера лишь на множестве меры нуль, а так как ряд Фурье должен суммироваться методом Фейера почти всюду, то почти все ряды $\sum \pm A_n(x)$ не являются рядами Фурье, и доказательство закончено.

З а м е ч а н и е 1. Полезно отметить, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то для почти всех рядов $\sum \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ частные суммы ряда почти всюду неограничены. Действительно, если ряд $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \varphi_n(t)$ имеет ограниченные частные суммы на плоском множестве E , $mE > 0$, то тогда на основании замечания к теореме 2 § 7 на множестве положительной меры $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)^2 < +\infty$, а это противоречит гипотезе $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$.

Этим замечанием мы воспользуемся в главе V, § 23.

З а м е ч а н и е 2. Мы доказали, что если $\sum a_n^2 + b_n^2 = +\infty$, то почти все ряды

$$\sum \pm (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

не являются рядами Фурье. Интересно отметить, что *когда* $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$, *то почти все эти ряды сходятся*. Этот результат является немедленным следствием теоремы 1 § 7.

§ 9. Некоторые необходимые условия для коэффициентов Фурье

В § 6 мы уже говорили о трудностях нахождения необходимых условий для коэффициентов Фурье от суммируемых функций.

Здесь мы, следуя Салему (Salem^[11]), укажем некоторые необходимые условия, которые могут представить известный интерес.

Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (9.1)$$

есть ряд Фурье от некоторой суммируемой функции $f(x)$. Пусть $\varphi(x)$ — функция с ограниченным изменением, α_n и β_n — ее коэффициенты Фурье; мы будем предполагать $a_0 = 0$. Тогда справедливо равенство Парсеваля (§ 5)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

Пусть μ — переменный параметр; рассмотрим функцию, равную $\varphi(\mu x)$ на $(-\pi, \pi)$ и с периодом 2π . Если $\alpha_n(\mu)$, $\beta_n(\mu)$ — ее коэффициенты Фурье, то мы будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(\mu x) dx = \pi \left[\frac{a_0 \alpha_0(\mu)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n(\mu) + b_n \beta_n(\mu) \right]. \quad (9.2)$$

Пользуясь леммой Фейера (см. глава I, § 20) и тем, что $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx = 0$, мы видим, что интеграл в левой части (9.2) стремится к нулю при $\mu \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\alpha_0(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\mu x) dx = \frac{1}{\mu\pi} \int_0^{\mu 2\pi} \varphi(y) dy \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow \infty$$

снова в силу $\alpha_0 = 0$. Поэтому из (9.2) получаем:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \alpha_n(\mu) + b_n \beta_n(\mu)] = 0$$

является необходимым условием для того, чтобы a_n, b_n были коэффициентами Фурье.

В частности, если положить $\varphi(x) = \cos x$ или $\varphi(x) = \sin x$ и считать μ не целым, то найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \mu x dx &= 2 \mu \sin \mu \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\mu^2 - n^2} + \frac{a_0 \sin \mu \pi}{\mu}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \mu x dx &= 2 \sin \mu \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n b_n}{\mu^2 - n^2}. \end{aligned}$$

Если вместо $f(x)$ рассмотреть $f(x + \pi)$, то мы избавимся от множителя $(-1)^n$. Заставим теперь $\mu \rightarrow \infty$, принимая значения, не приближающиеся ни к каким целым числам; например, положим

$$\mu = p + \frac{1}{2},$$

где p пробегает все целые числа.

Отсюда имеем такие необходимые условия для того, чтобы числа a_n и b_n были коэффициентами Фурье:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n b_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.3)$$

Из первого из этих условий можно, в частности, извлечь такое следствие: Если $a_n \downarrow 0$, то для того чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx$$

был рядом Фурье, необходимо чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n+1}) \ln n = 0. \quad (9.4)$$

Для доказательства этого утверждения покажем сначала, что если $a_n \downarrow 0$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.5)$$

Действительно, все члены ряда в формуле (9.5) отрицательны, поэтому ряд

$$\sum_{2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2}$$

знакоположителен, и в силу $a_n \downarrow 0$ его сумма не превосходит

$$a_{2p+1} \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2};$$

но при $n \geq 2p+1$ имеем $n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4}n^2$, а потому

$$\sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{4}{3} \sum_{2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Следовательно,

$$p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2} \leq p a_{2p+1} O\left(\frac{1}{p}\right) = o(1),$$

и это доказывает (9.5).

Отсюда следует, что при $a_n \downarrow 0$ необходимое условие (9.3) можно переписать в виде

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0. \quad (9.6)$$

Но так как

$$\frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = \frac{2}{2p+1} \left[\frac{1}{2p+1+2n} + \frac{1}{2p+1-2n} \right],$$

то условие (9.6) равносильно условию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2p} a_n \left[\frac{1}{2p+1+2n} + \frac{1}{2p+1-2n} \right] = 0. \quad (9.7)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{2p} a_n \frac{1}{2p+1+2n} < \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} a_n \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, поскольку $a_n \rightarrow 0$, то условие (9.7) принимает вид

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{2p+1-2n} = 0$$

или

$$\frac{a_1}{2p-1} + \frac{a_2}{2p-3} + \dots + \frac{a_p}{1} - \left[\frac{a_{p+1}}{1} + \frac{a_{p+2}}{3} + \dots + \frac{a_{2p}}{2p-1} \right] \rightarrow 0,$$

или

$$\frac{a_p - a_{p+1}}{1} + \frac{a_{p-1} - a_{p+2}}{3} + \dots + \frac{a_1 - a_{2p}}{2p-1} \rightarrow 0. \quad (9.8)$$

Но, полагая $\Delta_n = a_n - a_{n+1}$, мы сразу видим, что каждый из числителей дробей в (9.8) не меньше Δa_p (поскольку все $\Delta a_n \geq 0$ по условию), а потому (9.8) влечет

$$\Delta a_p \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \rightarrow 0.$$

Но тогда и

$$\Delta a_p \ln p \rightarrow 0,$$

и наше утверждение доказано.

Это необходимое условие позволяет построить пример ряда из косинусов:

$$\sum a_n \cos nx,$$

у которого $a_n \downarrow 0$, и однако он не является рядом Фурье *). Для этого достаточно положить, например,

$$a_n = \frac{1}{m} \quad \text{для} \quad 2^{(m-1)^2} \leq n < 2^{m^2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда монотонность налицо, но

$$(a_{2^{m^2-1}} - a_{2^{m^2}}) \ln 2^{m^2} = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) m^2 \ln 2 \rightarrow \ln 2$$

при $m \rightarrow \infty$ и необходимое условие не соблюдено.

§ 10. Необходимые и достаточные условия Салема

Мы хотим теперь указать некоторые условия, которые хотя и не являются прозрачными, но все же представляют интерес как необходимые и достаточные. Они были выведены Салемом (Salem [1]).

Обозначим через $\{M\}$ класс функций

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

непрерывных, дифференцируемых, $|\omega(x)| \leq 1$, и таких, что ряд Фурье от $\omega'(x)$ абсолютно сходится.

Т е о р е м а. Для того чтобы ряд

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{10.1}$$

был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы 1) формально проинтегрированный ряд

$$\sum -\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx$$

сходилась к непрерывной функции $F(x)$;

2) выражение

$$\sum a_n a_n + b_n b_n$$

стремилось к нулю, когда ω , находясь в классе $\{M\}$, меняется так, что

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2)$ стремится к нулю.

*) Первый пример такого ряда был построен Сидоном (см. Szidon [1]).

Условия необходимы. Допустим, что (10.1) есть ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$. Необходимость условия 1) есть классический результат. Пусть теперь $\omega(x)$ принадлежит $\{M\}$ и пусть

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 = \varepsilon. \quad (10.2)$$

Мы имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \omega(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n + b_n \beta_n. \quad (10.3)$$

Применение равенства Парсеваля законно (см. § 5), так как $\omega'(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, а потому $\omega(x)$ не только с ограниченным изменением, но и абсолютно непрерывна (более того, ряд в правой части (10.3) даже абсолютно сходится).

Пусть E — множество точек, где $|\omega(x)| \geq \varepsilon^{\frac{1}{3}}$; тогда из

$$\frac{1}{\pi} \int_E \omega^2(x) dx \geq \varepsilon^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\pi} mE$$

и из равенства (10.2) следует, что $mE < \pi \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Обозначая через CE дополнение к E и принимая во внимание то, что $|\omega(x)| \leq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \omega(x) dx \right| &\leq \left| \int_E f(x) \omega(x) dx \right| + \left| \int_{CE} f(x) \omega(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_E |f(x)| dx + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

а так как $\varepsilon \rightarrow 0$, то необходимость 2) доказана.

Условия достаточны. Достаточно будет доказать, что $F(x)$ абсолютно непрерывна; действительно, тогда $F(x)$ есть неопределенный интеграл от некоторой суммируемой $f(x)$, и так как $-\frac{b_n}{n}$ и $\frac{a_n}{n}$ являются коэффициентами Фурье от $F(x)$, то, интегрируя по частям, убедимся, что a_n и b_n — коэффициенты Фурье от $f(x)$.

Пусть $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_r, d_r)$ — некоторая система неперекрывающихся интервалов, лежащих на $[-\pi, \pi]$. Выберем функцию $\omega'(x) = \frac{d\omega}{dx}$ следующим образом: пусть p — целое положительное как угодно большое число. Положим для $i = 1, 2, \dots, r$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2} \frac{p\pi}{c_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{c_i} x\right) \text{ для } c_i < x < c_i \left(1 + \frac{1}{2p}\right),$$

$$\omega'(x) = \frac{1}{2} \frac{p\pi}{d_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{d_i} x\right) \text{ для } d_i \left(1 - \frac{1}{2p}\right) < x < d_i$$

и $\omega'(x) = 0$ во всех остальных точках $[-\pi, \pi]$.

Ясно, что свободный член ряда Фурье от $\omega'(x)$ равен 0, что ее ряд Фурье сходится абсолютно и что

$$|\omega(x)| = \left| \int_0^x \omega'(x) dx \right| < 1,$$

т. е. $\omega(x)$ принадлежит к классу $\{M\}$. Пусть

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx.$$

Тогда коэффициенты ряда Фурье для $\omega'(x)$ имеют вид $n\beta_n$ и $-n\alpha_n$, поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \right) n \beta_n - \left(\frac{a_n}{n} \right) n \alpha_n = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n + b_n \beta_n. \quad (10.3')$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x) dx < \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^v (d_i - c_i),$$

так как $\omega(x) = 0$ вне всех (c_i, d_i) и $|\omega(x)| < 1$ всюду.

Поэтому, если $\sum_{i=1}^v (d_i - c_i)$ стремится к нулю, то $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \rightarrow 0$, а тогда, в силу условия теоремы, и $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) \rightarrow 0$, а потому из (10.3')

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx \rightarrow 0. \quad (10.4)$$

Мы докажем, что из этого следует $\sum_{i=1}^v |F(d_i) - F(c_i)| \rightarrow 0$, а тогда абсолютная непрерывность $F(x)$ будет установлена. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \sum_{i=1}^v \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} F(x) \omega'(x) dx + \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} F(x) \omega'(x) dx.$$

Применяя первую теорему о среднем значении и обозначая через γ_i некоторую точку, такую, что $c_i < \gamma_i < c_i(1 + \frac{1}{2p})$, и через δ_i такую точку, что $d_i(1 - \frac{1}{2p}) < \delta_i < d_i$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} F(x) \omega'(x) dx &= F(\gamma_i) \int_{c_i}^{c_i(1+\frac{1}{2p})} \frac{1}{2} \frac{p\pi}{c_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{c_i} x\right) dx = \frac{1}{2} F(\gamma_i), \\ \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} F(x) \omega'(x) dx &= F(\delta_i) \int_{d_i(1-\frac{1}{2p})}^{d_i} \frac{1}{2} \frac{p\pi}{d_i} \sin\left(\frac{2p\pi}{d_i} x\right) dx = -\frac{1}{2} F(\delta_i). \end{aligned}$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \omega'(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^v [F(\gamma_i) - F(\delta_i)]. \quad (10.5)$$

Но выражение в правой части (10.5) как угодно близко к $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^v [F(d_i) - F(c_i)]$, если p достаточно велико, и, значит, из того, что интеграл в левой части (10.5) стремится к нулю (см. (10.4)), вытекает, что $\sum_{i=1}^v [F(d_i) - F(c_i)] \rightarrow 0$, а это заканчивает доказательство.

§ 11. Тригонометрическая проблема моментов

Вопрос о том, когда заданные числа $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ могут быть коэффициентами Фурье или, более специальный вопрос, когда они являются коэффициентами Фурье от функции, удовлетворяющей дополнительным требованиям (например, ограниченной или неотрицательной, или монотонной), может быть поставлен в терминах так называемой «тригонометрической проблемы моментов».

Принято называть «моментами» функции $f(x)$ числа

$$\mu_n = \int_a^b f(x) x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11.1)$$

и «тригонометрическими моментами» числа

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11.2)$$

Проблемой моментов называется такой вопрос: задана последовательность чисел μ_n , существует ли такая $f(x)$, для которой справедливы равенства (11.1)? Аналогично ставится и тригонометрическая проблема моментов. Так как система $\{e^{int}\}$ полна на $[0, 2\pi]$, то равенство нулю всех моментов функции возможно только, если она равна нулю почти всюду, а потому функция однозначно задается своими тригонометрическими моментами. Но, разумеется, далеко не всякая последовательность чисел может быть последовательностью моментов некоторой функции. Проблемой моментов занимался целый ряд авторов, начиная с П. Л. Чебышева. Основные сведения о степенной проблеме моментов читатель найдет в книге И. П. Натансона ^[М.15] часть II, глава VII. Подробное изложение результатов, относящихся как к степенной, так и к тригонометрической проблеме моментов, можно найти в книге Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна ^[М.2]. Мы здесь не имеем возможности излагать эти результаты, так как это потребовало бы слишком много места. Ограничимся для примера формулировкой одного из них. Для этого надо сначала ввести одно определение.

Пусть c_0 — действительное, $c_0 \neq 0$, $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — комплексные числа. Рассмотрим тригонометрические полиномы

$$T_n(z) = \sum_{k=-n}^n A_k e^{ikt} \quad (z = e^{it})$$

с, вообще говоря, комплексными коэффициентами; пусть

$$\sigma(T_n) = \sum_{k=-n}^n A_k c_k,$$

где

$$c_{-k} = \bar{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, что если $T_n(e^{it})$ есть тригонометрический полином с действительными коэффициентами ($A_{-k} = \bar{A}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$), то и $\sigma(T_n)$ есть действительное число.

Условимся называть *конечную последовательность*

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$$

ненегативной на окружности $0 \leq t \leq 2\pi$, если из соотношений

$$T_n(e^{it}) \neq 0, \quad T_n(e^{it}) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

всегда следует

$$\sigma(T_n) \geq 0.$$

Бесконечную последовательность

$$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$$

назовем *ненегативной на окружности*, если при любом n этим свойством обладает последовательность

$$c_0, c_1, \dots, c_n.$$

Можно указать ряд критериев для того, чтобы последовательность c была ненегативной на окружности, например критерий Теплица: для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\sum_0^m c_{i+k} x_i x_k, \quad \text{где} \quad m = \left[\frac{n}{2} \right],$$

была неотрицательна.

Приняв это определение, сформулируем следующую теорему Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [М.2].

Для того чтобы существовала функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} -L &\leq f(t) \leq L, \\ c_k &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad (k = 0, 1, \dots), \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$-2\pi L < c_0 < 2\pi L$$

и чтобы была ненегативна на окружности последовательность

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \dots,$$

где

$$\gamma_0 = 2 \cos \frac{c_0}{4L},$$

а последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ определяется с помощью разложения

$$e^{\frac{i}{2L} \left(\frac{c_0}{2} + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + \dots \right)} = \gamma + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots$$

Таким образом, с одной стороны, задача для случая ограниченной функции казалось бы полностью решена, но, с другой стороны, практически крайне трудно проверить, существует ли для заданной последовательности чисел ограниченная функция, имеющая их своими коэффициентами Фурье, и тем более ее найти.

Существуют и другие критерии, носящие столь же законченный характер с точки зрения чисто теоретической, но в то же время затруднительные для применения к конкретным случаям. Такова, например, теорема Каратеодори (см. Carathéodory [1], [2]).

Для того чтобы числа $1, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots; b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ были коэффициентами Фурье от положительной функции, необходимо и достаточно, чтобы точка $(a_1, a_2; \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n)$ в $2n$ -мерном пространстве принадлежала телу K_n , являющемуся наименьшим выпуклым телом, содержащим кривую

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & x_2 &= 2 \cos 2\varphi, & \dots, & & x_n &= 2 \cos n\varphi, \\ y_1 &= -2 \sin \varphi, & y_2 &= -2 \sin 2\varphi, & \dots, & & y_n &= -2 \sin n\varphi \\ & & & & & & (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

В том же направлении имеется работа Байада (Bajada [1]), см. также Гизетти (Ghizzetti [1], [2], [3]), Паньи (Pagni [1]).

§ 12. Коэффициенты тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами

В работе Хелсона (см. Nelson^[1]) указано, что Штейнгаузом был поставлен следующий вопрос:

Пусть у тригонометрического ряда

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (12.1)$$

все частные суммы $\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ неотрицательны при любом x . Следует ли отсюда, что это ряд Фурье?

Этот вопрос возник в связи с тем, что Штейнгауз^[4] доказал теорему: если тригонометрический ряд сходится всюду и сумма его положительна, то этот ряд есть ряд Фурье *).

Вопрос в этой форме до сих пор не решен. Мы хотим изложить здесь два результата, тесно связанных с решением поставленной проблемы. Прежде всего заметим, что если проблема Штейнгауза решается положительно, то во всяком случае из

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \geq 0 \quad \text{при всех } N \text{ и } x \quad (12.2)$$

должно следовать $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Здесь будет доказано, что это действительно имеет место. Этот результат будет следовать из теоремы Хелсона, в которой доказывается даже более сильное утверждение (см. ниже теорему Хелсона).

С другой стороны, будет дан пример, принадлежащий Турану (см. Turán^[1]) и показывающий, что при неотрицательности частных сумм ряда (12.1) возможен все же случай $\sum c_n^2 = +\infty$. Следовательно, при выполнении (12.2) ряд не обязан быть рядом Фурье от $f \in L^2$. Должен ли он все же быть рядом Фурье — остается еще не выясненным **).

Сформулируем теперь теорему Хелсона:

Теорема Хелсона. Если

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| dx < A \quad (12.3)$$

при $N \rightarrow \infty$, то $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$.

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в случае, когда выполнено (12.2), то и условие (12.3) выполнено, так как тогда

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right| dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} dx = c_0 \cdot 2\pi.$$

*) Доказательство этой теоремы Штейнгауза (и даже более общего результата) будет нами дано в § 4 главы XIV.

**) Для случая, когда ряд сходится всюду, кроме одной точки, к неотрицательной функции $f(x)$, можно только утверждать, что $f(x) \in L$, но нельзя утверждать, что $f(x) \in L^p$ для $p > 1$. Действительно, мы знаем (см. § 30 главы I), что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ сходится всюду, кроме $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, и его сумма $f(x)$ неотрицательна. Однако $f(x) \notin L^p$, каково бы ни было $p > 1$, так как, если бы $f(x) \in L^p$ ($p > 1$), то (см. § 4) имели бы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < +\infty,$$

что при $a_n = \frac{1}{\ln n}$ не имеет места.

Поэтому из теоремы Хелсона немедленно следует, что если у тригонометрического ряда все частные суммы неотрицательны при любом x , то его коэффициенты стремятся к нулю.

Доказательство теоремы Хелсона. Если обозначить через $\sigma_N(x)$ фейеровские суммы ряда (12.1), то из условия (12.3) сразу следует

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_N(x)| dx < A, \quad (12.4)$$

а потому (см. § 60 гл. I) рассматриваемый ряд (12.1) есть ряд Фурье—Стилтьеса от некоторой функции $\mu(x)$, т. е.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} d\mu \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (12.5)$$

Допустим противное тому, что мы хотим доказать, т. е. $c_n \not\rightarrow 0$. Это значит, что найдется такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность целых n_j , что

$$|c_{n_j}| \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

Если определить функции $g_n(x)$ условием

$$g_n(x) = \int_0^x e^{-int} d\mu,$$

то $\{g_{n_j}(x)\}$ ограничены в совокупности и имеют одно и то же полное изменение, а потому по первой теореме Хелли (см. Вводный материал, § 17) из последовательности $\{g_{n_j}(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке к некоторой $\gamma(x)$ с ограниченным изменением. Чтобы не менять обозначений, будем считать, что уже вся последовательность $\{n_j\}$ обладает этим свойством. Тогда в силу теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла Стилтьеса (см. Вводный материал, § 17) имеем для любой непрерывной $\varphi(x)$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-in_j x} d\mu. \quad (12.7)$$

Если мы разложим $\mu(x)$ на сумму двух функций, из которых одна сингулярная (см. Добавления, § 17), а другая — абсолютно непрерывная, то равенство (12.7) остается в силе для сингулярной части, так как для абсолютно непрерывной соответствующий интеграл должен стремиться к нулю.

Будем в формуле (12.7) рассматривать в качестве $\varphi(x)$ такие непрерывные функции, которые по модулю не превосходят единицу и обращаются в нуль вне некоторого интервала (a, b) . Имеем

$$\sup_{\varphi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_a^b \varphi(x) d\gamma = \text{Var } \gamma_{(a,b)}$$

в силу свойств норм линейных функционалов (см. § 19 Вводного материала). Но из (12.7) видим, что для таких φ

$$\left| \int_a^b \varphi(x) d\gamma \right| = \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma \right| \leq \int_a^b |d\mu| = \text{Var } \mu_{(a,b)}, \quad (12.8)$$

т. е.

$$\text{Var } \gamma_{(a,b)} \leq \text{Var } \mu_{(a,b)}. \quad (12.9)$$

Так как $\mu(x)$ сингулярна, то и $\text{Var } \mu$ есть сингулярная функция x (см. (0,x)

Добавления, § 17), а потому, поскольку (12.9) справедливо для любых a и b , мы имеем

$$\left| \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h} \right| \leq \frac{\text{Var } \gamma(x)}{h} \leq \frac{\text{Var } \mu(x)}{h} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

для почти всех x . Поэтому $\gamma'(x) = 0$ почти всюду. Покажем, что $\gamma(x)$ сингулярна. Для этого надо только убедиться, что $\gamma(x) \neq \text{const}$. Но, полагая в (12.7) $\varphi(x) = 1$, мы видим, что в силу (12.5) и (12.6)

$$\int_0^{2\pi} d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-in_j x} d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} 2\pi c_{n_j} \neq 0,$$

а тогда ясно, что $\gamma(x) \neq \text{const}$. Итак, $\gamma(x)$ сингулярна.

Рассмотрим теперь для тех же n_j функции $h_n(x)$, определенные так:

$$h_n(x) = \int_0^x e^{-int} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} dt.$$

В силу условия (12.3) их полные изменения ограничены в совокупности, и сами они тоже, а потому можно, рассуждая по предыдущему, утверждать, что найдется такая $\gamma^*(x)$, для которой при любой непрерывной $\varphi(x)$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x) d\gamma^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (e^{-im_j x} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{inx}) \varphi(x) dx.$$

Здесь последовательность $\{m_j\}$ содержится в $\{n_j\}$.

Покажем, что для всякого $k > 0$ имеем

$$a_k^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma^* = 0,$$

т. е. коэффициенты Фурье—Стилтьеса a_k^* от $\gamma^*(x)$ обращаются в нуль для всех $k > 0$.

Действительно, мы имеем

$$2\pi a_k^* = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x} dx = 0, \quad (12.8')$$

так как $n - m_j \leq 0$ и, следовательно, $n - m_j - k < 0$ при $k > 0$, а потому каждый интеграл в правой части (12.8') равен нулю.

Покажем теперь, что если a_k — коэффициенты Фурье—Стилтьеса для $\gamma(x)$, то

$$a_k^* = a_k \quad \text{при } k \leq 0.$$

Действительно, с одной стороны

$$2\pi a_k^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-m_j}^{m_j} c_n e^{i(n-m_j-k)x} dx = 2\pi \lim_{j \rightarrow \infty} c_{m_j+k}, \quad (12.9')$$

так как только при $n = m_j + k$ интеграл в правой части (12.9') отличен от нуля. С другой стороны, в силу (12.7), подставляя $\varphi(x) = e^{-ikx}$, находим

$$2\pi a_k = \int_0^{2\pi} e^{-ikx} d\gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_j+k)x} d\mu = 2\pi \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}.$$

Раз $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}$ существует, а последовательность $\{m_j\}$ содержится в $\{n_j\}$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{m_j+k} = \lim_{j \rightarrow \infty} c_{n_j+k}$, а потому

$$a_k = a_k^*, \quad k \leq 0.$$

Следовательно, у функции $\gamma(x) - \gamma^*(x)$ все коэффициенты Фурье—Стилтьеса с неположительными индексами равны нулю, а потому $\gamma(x) - \gamma^*(x)$ абсолютно непрерывна по теореме Ф. и М. Рисса (см. глава VIII, § 12). Но по той же теореме из $a_k^* = 0$ при $k > 0$ следует, что $\gamma^*(x)$ абсолютно непрерывна. Значит, и $\gamma(x)$ абсолютно непрерывна, а мы доказали ранее, что она сингулярна.

Из полученного противоречия вытекает, что (12.3) и (12.6) несовместны, а потому

$$\lim |c_n| = 0 \quad \text{при} \quad |n| \rightarrow +\infty,$$

и теорема доказана.

Остается открытым вопрос, не должна ли при наличии условия (12.3) функция $\mu(x)$ быть абсолютно непрерывной. Если бы это было верно, то справедливость гипотезы Штейнгауза была бы доказана, потому что ряд $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$ оказался бы просто рядом Фурье.

З а м е ч а н и е. Не только для тригонометрических рядов, удовлетворяющих лишь условию $c_n \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$, но даже для рядов Фурье условие Хелсона

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)| dx < C$$

(где $S_n(x)$ — сумма n первых членов ряда), вообще говоря, не имеет места. Это будет доказано в § 22 главы VIII. Таким образом, теорема Хелсона заведомо необратима.

Мы теперь переходим к построению примера Турана, упомянутого в начале этого параграфа и показывающего, что неотрицательность частных сумм тригонометрического ряда во всяком случае не влечет то, что он есть ряд Фурье от $f(x) \in L^2$.

Т е о р е м а Т у р а н а. *Существует тригонометрический ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (12.10)$$

у которого частные суммы $S_n(x) \geq 0$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), $n = 1, 2, \dots$, и, однако, $\sum a_n^2 = +\infty$.

В качестве коэффициентов a_n Туран берет коэффициенты разложения в ряд Тейлора для $(1-z)^{-\frac{1}{2}}$, как известно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n, \quad (12.11)$$

причем ряд сходится для $|z| < 1$. Полагая

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (12.12)$$

покажем, что ряд (12.10) удовлетворяет условиям теоремы Турана.

Для этого прежде всего заметим, что

$$\frac{\pi}{2} = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n + \theta_n}, \quad \text{где } 0 < \theta_n < 1$$

(как доказывается при выводе формулы Валлиса, см., например, Фихтенгольц, т. II, стр. 169), откуда сразу следует для $n = 1, 2, \dots$

$$a_n^2 = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2n + \theta_n}, \quad (12.13)$$

а потому

$$\sum a_n^2 = +\infty.$$

Теперь надо показать, что частные суммы ряда (12.10) все неотрицательны.

С этой целью заметим сначала, что в силу (12.13)

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.14)$$

Теперь докажем лемму:

Л е м м а. Если

$$g(x) = d_0 + d_1 \cos x + \dots + d_n \cos nx$$

— тригонометрический полином, у которого коэффициенты положительны и монотонно убывают (или возрастают), то $g(x)$ не обращается в нуль в интервале

$$0 < x < \frac{\pi}{n}. \quad (12.15)$$

Для доказательства запишем $g(x)$ в виде

$$g(x) = \sum_{v=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} d_v \cos vx + \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n d_v \cos vx.$$

В первой сумме число членов не меньше, чем во второй, и притом в силу (12.15) все эти члены неотрицательны. Следовательно, если сложить каждый член $d_v \cos vx$ второй суммы с членом $d_{n-v} \cos (n-v)x$ первой суммы, то

$$g(x) \geq \sum_{v=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n [d_v \cos vx + d_{n-v} \cos (n-v)x]. \quad (12.16)$$

Но для рассматриваемых значений v в силу (12.15), очевидно,

$$0 \leq (n-v)x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того,

$$(n-v)x < vx < \pi - (n-v)x.$$

Следовательно,

$$|\cos vx| < |\cos (n-v)x| = \cos (n-v)x. \quad (12.17)$$

Так как мы коэффициенты полинома $g(x)$ предположили монотонно убывающими, то

$$d_v \leq d_{n-v},$$

а отсюда и из (12.17) следует, что все члены суммы, стоящей в квадратных скобках в (12.16), положительны, а потому лемма доказана.

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Если мы возьмем частную сумму $S_n(x)$ ряда (12.10), то так как числа a_n положительны и монотонно убывают (см. (12.12)), мы находимся в условиях леммы, т. е. заведомо имеем

$$S_n(x) \geq 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}.$$

В силу четности полинома $S_n(x)$ достаточно теперь доказывать его неотрицательность для $\frac{\pi}{n} < x \leq \pi$.

Кроме того, для $n \leq 2$ утверждение очевидно, так как

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{8},$$

и полиномы

$$S_0 = 1, \quad S_1(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x, \quad S_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x$$

неотрицательны просто потому, что $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) > 0$.

Итак, достаточно рассматривать $S_n(x)$ при

$$n \geq 3 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{n} < x \leq \pi. \quad (12.18)$$

Так как коэффициенты в разложении $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ монотонно убывают, то по теореме Абеля ряд (12.11) сходится не только для $|z| < 1$, но и для $z = e^{it}$, если только $t \neq 0$ (mod 2π).

Следовательно, в этих условиях

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_v e^{itv} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{it}}}, \quad 0 < t < 2\pi.$$

Отделив действительную часть, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{v=0}^{\infty} a_v e^{itv} &= \sum_{v=0}^{\infty} a_v \cos vt = \operatorname{Re} \left[(1 - e^{it})^{-\frac{1}{2}} \right] = \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{t}{4}} \left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{-i\frac{t}{4}} \left(-2i \sin \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] = \operatorname{Re} \frac{e^{i\frac{\pi-t}{4}}}{\sqrt{2 \sin \frac{t}{2}}} = \frac{\cos \frac{\pi-t}{4}}{\sqrt{2 \sin \frac{t}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $0 < x < 2\pi$

$$S_n(x) = \frac{\cos \frac{\pi-x}{4}}{\sqrt{2 \sin \frac{x}{2}}} - \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \cos vx.$$

Но в силу (12.18) во всяком случае $\cos \frac{\pi-x}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда

$$S_n(x) > \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} - \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v \cos vx. \quad (12.19)$$

Мы теперь займемся оценкой сверху ряда, стоящего в правой части (12.19).

В силу леммы Абеля (см. Вводный материал, § 1) и учитывая, что

$$|D_\nu(x)| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad \nu = 1, 2, \dots; \quad 0 < x \leq \pi,$$

имеем

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x \right| \leq \frac{a_{n+1}}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (12.20)$$

Но так как в силу (12.14) имеем

$$a_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}, \quad (12.21)$$

то из (12.19), (12.20) и (12.21) следует

$$S_n(x) > \frac{1}{2\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)\sin \frac{x}{2}}} > \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}}} \right). \quad (12.22)$$

Из этого мы должны теперь заключить, что $S_n(x) \geq 0$. Пусть сначала

$$\frac{4}{n} < x \leq \pi.$$

Тогда

$$\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{\pi} > \frac{4}{n\pi},$$

а потому

$$\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}} > 2,$$

и это в силу (12.22) влечет $S_n(x) > 0$.

Теперь рассмотрим случай

$$\frac{\pi}{n} < x \leq \frac{4}{n}. \quad (12.23)$$

В этом случае, так как при $x > 0$

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

имеем в силу (12.23)

$$\sin \frac{x}{2} \geq \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} \geq \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{24} \cdot \frac{16}{n^2} \right) \geq \frac{\pi}{2n} \left(1 - \frac{2}{3n^2} \right). \quad (12.24)$$

Но мы уже отмечали, что достаточно рассматривать случай $n \geq 3$, а между тем уже при $n \geq 2$ имеем в силу (12.24)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n \sin \frac{x}{2}}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \left(1 - \frac{2}{3n^2} \right)}} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \left(1 - \frac{1}{6} \right)}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{12}{5}} < \frac{1}{2},$$

а потому из (12.22) снова заключаем, что $S_n(x) > 0$, и теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Автор отмечает, что в последнем пункте доказательства было существенно использовано неравенство

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

так как если бы взять, например, $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$, то уже данный ход рассуждений не привел бы к цели.

З а м е ч а н и е 2. Если бы в лемме рассмотреть вместо интервала $0 < x < \frac{\pi}{n}$ меньший интервал $0 < x < \frac{\pi}{2n}$, то необращение $g(x)$ в нуль было бы тривиальным; однако этого факта было бы недостаточно для доказательства теоремы.

С другой стороны, хотя для доказательства теоремы это и не нужно, можно отметить, что расширить интервал $(0, \frac{\pi}{n})$ уже нельзя. Действительно, если для $n \geq 1$ рассмотреть полином

$$g_0(x) = 1 + \cos x + \dots + \cos nx,$$

то так как

$$g_0(x) = \frac{1}{2} + D_n(x),$$

где $D_n(x)$ — ядро Дирихле, видим, что

$$g_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Но отсюда ясно, что $g_0(x)$ обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{n}$, а между тем он удовлетворяет условиям леммы.

Ряд интересных замечаний и дополнений к данному вопросу содержится в уже упомянутой работе Турана (Turán^[1]).

§ 13. Преобразования рядов Фурье

Ряд авторов изучал следующий вопрос: допустим, что

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (13.1)$$

При каких условиях, наложенных на числа λ_n , ряд

$$\frac{a_0}{2} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \lambda_n \quad (13.2)$$

снова является рядом Фурье, и если он есть $\sigma(F)$, то что можно сказать об этой функции $F(x)$, зная свойства $f(x)$? Мы не будем рассматривать здесь те случаи, которые уже разобраны в книге Зигмунда^[М.6], § 4.60, и хотим указать некоторые более поздние работы в том же направлении.

Так, например, Салем (Salem^[1]) показывает, что можно всегда выбрать λ_n так, чтобы $\lambda_n \uparrow \infty$, последовательность $\{\lambda_n\}$ была вогнутой и при этом ряд от непрерывной $f(x)$ преобразовывался в ряд от непрерывной F и аналогично для случая $f \in L$ и $F \in L$.

А. Ф. Тиман^[3] указал эффективное необходимое условие для $\{\lambda_n\}$, чтобы ряд Фурье любой ограниченной функции, или непрерывной, или интегрируемой преобразовывался в ряд Фурье функции того же класса (а также ряд Фурье—Стилтьеса в ряд Фурье—Стилтьеса). Это условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{|k-n|} - \lambda_{k+n}}{k},$$

сходится равномерно относительно n . В частности, если $\{\lambda_n\}$ монотонна, то отсюда $\lambda_n - \lambda_{n+1} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$.

А. А. Конюшков^[1] показал, что если $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$, т. е.

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = O(h^\alpha),$$

то для любой выпуклой последовательности $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow 0$ ряд (13.2) будет рядом Фурье от $F \in \text{Lip}(\alpha, p)$, т. е.

$$\|F(x+h) - F(x)\|_p = o(h^\alpha).$$

Проблему преобразования ряда Фурье можно обобщить, а именно: дана матрица $\|a_{kj}\|$. Совершаем преобразование, определяемое этой матрицей, над коэффициентами a_n и b_n , т. е. берем

$$A_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} a_j; \quad B_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} b_j. \quad (13.3)$$

Предполагая, что эти ряды сходятся, т. е. A_k и B_k определены для любого k , спрашиваем себя, при каких условиях, наложенных на матрицу, ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (13.4)$$

будет снова рядом Фурье, и какова определяемая им функция.

В частности, Харди^[2] первый рассмотрел этот вопрос для случая, когда

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

(т. е. матрица является той, которая употребляется в методе (С, 1)). Харди показал, что такая матрица преобразует ряд Фурье в ряд Фурье, и если $f(x) \in L^p$ ($1 < p < \infty$), то и $F(x) \in L^p$. Далее Беллман (Bellman^[2]) рассматривал случай, когда

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

В этом случае для произвольного ряда Фурье числа A_k могут уже не иметь смысла, но если $f \in L^p$ при $p > 1$, то он показал, что вновь полученный ряд будет рядом Фурье от $F \in L^p$. Матрица Беллмана является транспонированной по отношению к матрице Харди.

Другие авторы рассматривали также матрицу Харди, но для ряда из синусов, а также и матрицу Беллмана для этого случая, и при этом налагали на $f(x)$ те или иные условия.

Не имея возможности останавливаться на всех частных результатах, отметим один достаточно общий результат Юнга (F. Young^[1]). Он изучал произвольные матрицы $\|a_{kj}\|$ и указал условия, при которых они преобразуют ряд от $f \in L^p$ в ряд от $F \in L^p$. В частности, из его результатов вытекает, что если матрица обладает этим свойством, то и транспонированная тоже, а потому теорема Беллмана могла бы быть выведена из теоремы Харди.

Укажем еще, что в уже упомянутой работе А. А. Конюшкова есть теорема, аналогичная теореме Беллмана, а именно:

Если $g(x) \sim \sum b_n \sin nx$ и $g(x) \in \text{Lip } a$, $0 < a < 1$, то и для $G(x) \sim \sum B_n \sin nx$, где $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k}$, имеем $G(x) \in \text{Lip } a$.

Там же имеются и теоремы о преобразованиях рядов Фурье для функций из классов $\text{Lip } (a, p)$.

Наконец, говоря о преобразованиях рядов Фурье, отметим работу Рудина (Rudin^[1]), где ставится вопрос, при каких условиях, наложенных на функцию $\varphi(z)$ из того, что $\sum c_n e^{inx}$ есть ряд Фурье, следует, что и $\sum \varphi(c_n) e^{inx}$ есть ряд Фурье. Оказывается для этого необходимо, чтобы $\varphi(z)$ удовлетворяла условию Липшица в окрестности нуля. Это условие недостаточно, так как $\varphi(z) = |z|$ удовлетворяет условию $\text{Lip } 1$, а между тем $\sum |c_n| e^{inx}$ может и не быть рядом Фурье; это вытекает из результатов Кагана (Kahane^[1]).
