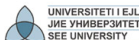


Derivati i dytë. Funksionet rritëse dhe zvogëluese

F. M. Berisha



Universiteti i Evropës Juglindore, Tetovë

Qëllimet dhe objektivat

- Studimi, me anë të derivatit të dytë, i shpejtësisë së ndryshimit të shpejtësisë së ndryshimit të një madhësie
- Zbatimi i derivatit për të përcaktuar ku një funksion është rritës ose zvogëlues
- Gjetja me anë të derivatit të parë të një maksimumi relativ ose minimumi relativ të një funksioni

Përmbajtja

1 Derivati i dytë

- Shpejtësia e ndryshimit të shpejtësisë së ndryshimit
- Aplikacion: Shpejtësia e ndryshimit të shpejtësisë së prodhimit

2 Funksionet rritëse dhe zvogëluese

- Kriteri derivat për funksione rritëse dhe zvogëluese
- Ekstremumet relative
- Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të parë

Derivati i dytë

Derivati i dytë

Derivati i dytë i një funksioni është derivati i derivatit të tij.
Në qoftë se $y = f(x)$, derivati i dytë shënohet me

$$f''(x) \quad \text{ose} \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Derivati i dytë jep shpejtësinë e ndryshimit të shpejtësisë së ndryshimit të funksionit fillestar.

Aplikacion: Ndryshimi i shpejtësisë së prodhimit

Shembull

Një studim efikasiteti të punëtorëve të ndërrimit të mëngjesit në një uzinë tregon se një punëtor mesatar i cili arrin në punë në orën 8:00 do të ketë montuar

$$Q(t) = -t^3 + 11t^2 + 16t$$

radio-tranzistorë t orë më pas.

- 1 Llogaritni shpejtësinë e prodhimit të punëtorit në orën 12:00?
- 2 Me çfarë shpejtësie sipas kohës ndryshon shpejtësia e prodhimit e punëtorit në orën 12:00?
- 3 Zbatoni kalkulusin për të vlerësuar ndryshimin në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 12:00 dhe 12:10.
- 4 Llogaritni ndryshimin e saktë në shpejtësinë e prodhimit të punëtorit ndërmjet 12:00 dhe 12:10.

Aplikacion: Ndryshimi i shpejtësisë... (Vazhdim)

Zgjidhje...

- 1 Shpejtësia e prodhimit e punëtorit është derivati i parë

$$Q'(t) = -3t^2 + 22t + 16$$

i funksionit të prodhimit $Q(t)$.

Në orën 12:00 është $t = 4$ dhe shpejtësia e prodhimit është

$$Q'(4) = -3 \cdot 4^2 + 22 \cdot 4 + 16 = 56$$

njësi në orë.



Aplikacion: Ndryshimi i shpejtësisë... (Vazhdim)

... Zgjidhje...

- ② Shpejtësia e ndryshimit të shpejtësisë së prodhimit është derivati i dytë

$$Q''(t) = -6t + 22$$

i funksionit të prodhimit.

Në orën 12:00 kjo shpejtësi është

$$Q''(4) = -6 \cdot 4 + 22 = -2$$

njësi në orë në orë.



Aplikacion: Ndryshimi i shpejtësisë... (Vazhdim)

... Zgjidhje.

- ③ Vërejmë se 10 minuta janë $\frac{1}{6}$ orë; d.m.th. $\Delta t = \frac{1}{6}$ orë.
Zbatojmë për $Q'(t)$ formulën për përafrim me shtesa:

$$\Delta Q' \approx Q''(t)\Delta q,$$

për të fituar pas zëvendësimit $t = 4$ dhe $\Delta t = \frac{1}{6}$:

$$\Delta Q' \approx Q''(4)\Delta q = -2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0.33$$

njësi në orë.



Aplikacion: Ndryshimi i shpejtësisë... (Vazhdim)

... Zgjidhje...

- ④ Ndryshimi i saktë i shpejtësisë së prodhimit të punëtorit ndërmjet 12:00 dhe 12:10 është

$$\begin{aligned} Q' \left(4 + \frac{1}{6} \right) - Q'(4) &= Q' \left(\frac{25}{6} \right) - Q'(4) \\ &= -3 \left(\frac{25}{6} \right)^2 + 22 \left(\frac{25}{6} \right) + 16 - (-3 \cdot 4^2 + 22 \cdot 4 + 16) \\ &\approx 55.58 - 56 = -0.42 \end{aligned}$$

njësi në orë.



Funksionet rritëse dhe zvogëluese

Funksionet rritëse dhe ato zvogëluese

- Një funksion $f(x)$ është **rritës** në një interval $a < x < b$ në qoftë se $f(x_1) < f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ për x_1, x_2 nga intervali.
 - Me fjalë, në qoftë se duke u rritur x rritet edhe $y = f(x)$.
- Funksioni është **zvogëlues** në $a < x < b$ në qoftë se $f(x_1) > f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ për x_1, x_2 nga intervali.
 - Me fjalë, në qoftë se duke u rritur x zvogëlohet $y = f(x)$.

Funksione rritëse dhe zvogëluese

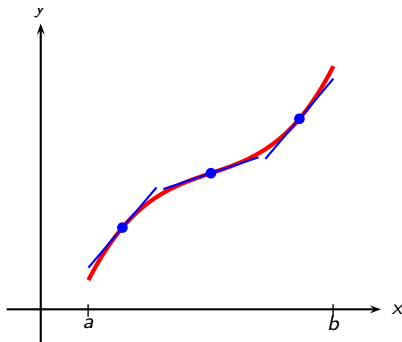


Figura: $f'(x) > 0$ në $a < x < b$,
prandaj $f(x)$ është rritës.

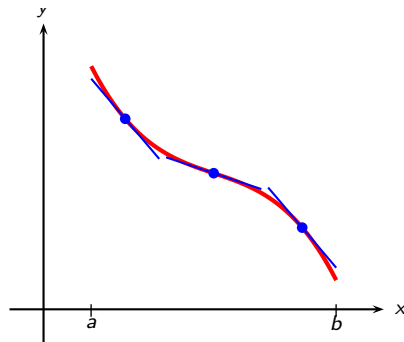


Figura: $f'(x) < 0$ në $a < x < b$,
prandaj $f(x)$ është zvogëlues.

Funksionet rritëse dhe zvogëluese

Kriteri derivat për funksione rritëse dhe zvogëluese

- Funksioni $f(x)$ është rritës në interval ku $f'(x) > 0$.
- Funksioni $f(x)$ është zvogëlues në interval ku $f'(x) < 0$.

Shembuj: Përcaktimi i intervaleve të monotonisë

Shembull

Gjeni intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit për

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$$

Zgjidhje...

Derivati i $f(x)$ është

$$f'(x) = -x^2 + x + 2 = -(x + 1)(x - 2),$$

i cili është kudo i vazhdueshëm dhe ka zero në $x = -1$ dhe $x = 2$. Prandaj, parashenja e $f'(x)$ duhet të jetë e pandryshueshme në secilin nga intervalet $x < -1$, $-1 < x < 2$ dhe $x > 2$. □

Shembuj: Përcaktimi i intervaleve... (Vazhdim)

... Zgjidhje.

Intervali	Numri testues c	Shenja e $f'(c)$	Përfundimi
$x < -1$	-2	$f'(-2) < 0$	$f(x) \searrow$
$-1 < x < 2$	0	$f'(0) > 0$	$f(x) \nearrow$
$x > 2$	3	$f'(3) < 0$	$f(x) \searrow$

Tabela: Intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit të funksionit

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1.$$



Shembuj: Përcaktimi i intervaleve... (Vazhdim)

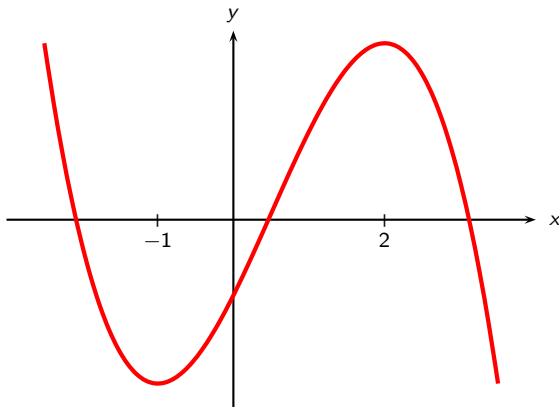


Figura: Grafiku i $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

Shembuj: Përcaktimi i intervaleve... (Vazhdim)

Shembull

Gjeni intervalet e rritjes dhe të zvogëlimit për

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Zgjidhje...

Funksioni është i përkufizuar për $x \neq 1$ dhe ka derivatin

$$f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

i cili është i vazhdueshëm kudo përveç në $x = 1$.



Shembuj: Përcaktimi i intervaleve... (Vazhdim)

Zgjidhje...

Duke zgjedhur numra testues në intervalet $x < 0$, $0 < x < 1$, $1 < x < 2$ dhe $x > 2$ (për shembull, -1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ dhe 3) fitojmë diagramin vijues të shigjetave.



Shembuj: Përcaktimi i intervaleve... (Vazhdim)

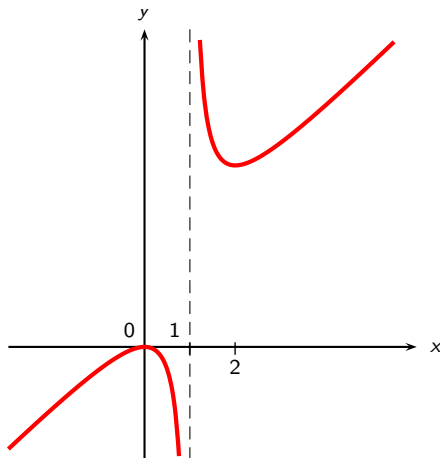


Figura: Grafiku i $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Ekstremumet relative

Ekstremumet relative

- Themi se funksioni $f(x)$ ka **maksimum relativ** në $x = c$ në qoftë se $f(c) \geq f(x)$ për çdo x nga ndonjë interval $a \leq x \leq b$ i cili përmban pikën c .
- Ngjashëm, $f(x)$ ka **minimum relativ** në $x = c$ në qoftë se $f(c) \leq f(x)$ për çdo x nga ndonjë interval $a \leq x \leq b$ i cili përmban pikën c .
- Së bashku, maksimumet dhe minimumet relative të $f(x)$ quhen **ekstremume relative** të tij.

Funksione rritëse dhe zvogëluese

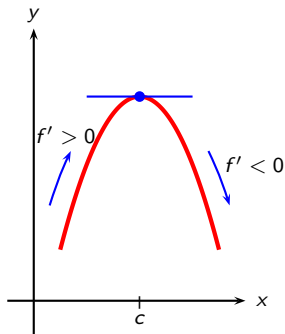


Figura: Maksimum relativ

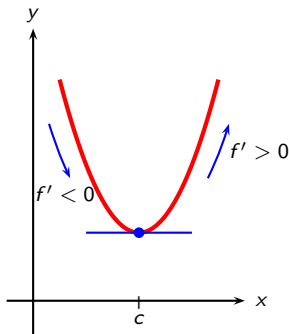


Figura: Minimum relativ

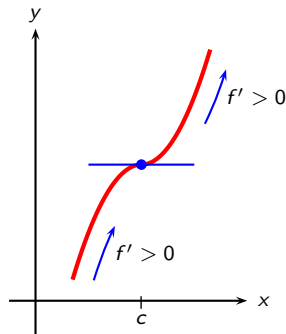


Figura: Nuk është ekstreum relativ

Pikat kritike

Pikat kritike

- Një numër c nga domeni i një funksioni të derivueshëm $f(x)$ quhet *kritik* në qoftë se $f'(c) = 0$.
- Pika korresponduese $(c, f(c))$ në grafikun e $f(x)$ quhet *pikë kritike* e $f(x)$.

Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të parë

Testi i ekstremumeve relative me anë të derivatit të parë

Le të ketë $f(x)$ pikë kritike në $x = c$ (d.m.th., $f'(c) = 0$).

Atëherë, pika kritike $(c, f(c))$:

- është **maksimum relativ** në qoftë se $f'(x) > 0$ në të majtë të c dhe $f'(x) < 0$ në të djathtë të c ;
- është **minimum relativ** në qoftë se $f'(x) < 0$ në të majtë të c dhe $f'(x) > 0$ në të djathtë të c ;
- **nuk është ekstremum relativ** në qoftë se $f'(x)$ ka parashenjë të njëjtë nga të dyja anët e c .

Shembull testi i ekstremumeve relative

Shembull

Gjeni pikat kritike të funksionit $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3$ dhe klasifikoni secilën pikë kritike si maksimum relativ, minimum relativ ose as njëra as tjetra.

Zgjidhje...

Derivati i $f(x)$ është kudo i vazhdueshëm:

$$f'(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x - 2)^2.$$

Pikat kritike:

$$f'(x) = 0$$

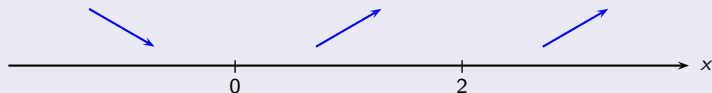
$$x = 0 \quad \text{ose} \quad x = 2$$



Shembull testi i ekstreumëve relative. (Vazhdimi)

... Zgjidhje.

Diagrami i shigjetave:



Funksioni ka minimum relativ në $x = 0$
dhe nuk ka ekstreum relativ në $x = 2$.



Shembull testi i ekstremumeve relative. (Vazhdimi)

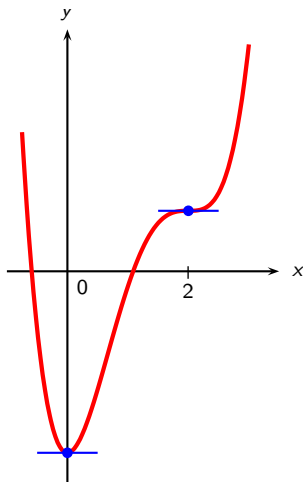


Figura: Grafiku i $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3$.

Aplikacion: Optimizimi i të ardhurave

Shembull

Të ardhurat e nxjerrura nga shitja e x njësisish të një malli të caktuar janë

$$R(x) = \frac{3x - x^2}{x^2 + 3} \quad \text{milion euro.}$$

Çfarë niveli i prodhimit rezulton me të ardhura maksimale?

Zgjidhje...

Si funksion të ardhurash, $R(x)$ ka kuptim vetëm për $x \geq 0$ dhe $R(x) \geq 0$; d.m.th. $0 \leq x \leq 3$. □

Aplikacion: Optimizimi i të ardhurave. (Vazhdimi)

Zgjidhje...

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{(3-2x)(x^2+3) - (3x-x^2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-3(x^2+2x-3)}{(x^2+3)^2} = \frac{-3(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}. \end{aligned}$$

Diagrami i shigjetave:



Të ardhura maksimale për nivelin e prodhimit $x = 1$.



Aplikacion: Optimizimi i të ardhurave. (Vazhdimi)

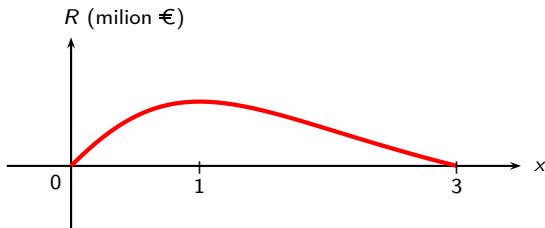


Figura: Grafiku i $R(x) = \frac{3x - x^2}{x^2 + 3}$.

Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://fberisha.netfirms.com>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 199–213.
- L. D. Hofmann, G. L. Bradley, *Calculus – for business, economics and life sciences*, fq. 161–210.

Përfundim

- Shpejtësia $f''(x)$ e ndryshimit të shpejtësisë $f'(x)$ të ndryshimit të një funksioni $f(x)$
- Përcaktimi i intervalleve të rritjes dhe zvogëlimit të një funksioni $f(x)$ me anë të derivatit të tij të parë $f'(x)$
- Ekstremumet relative
- Testi i ekstemumeve relative me anë të derivatit të parë