

Huat

Huat me anuitete të barabarta. Amortizimi

F. M. Berisha, N. Berisha



Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Të kuptuarit e lidhmërisë ndërmjet rentave periodike dhe huave me anuitete të barabarta
- Njehsimi i huave me anuitete të barabarta me kapitalizim periodik
- Zbatimi në aplikacione praktike
- Përpilimi i planit të amortizimit të një huaje me anuitete të barabarta

Përmbajtja

- 1 Huat me anuitete të barabarta
 - Shembuj aplikacionesh
 - Këstet e huave me anuitete të barabarta
- 2 Plani i amortizimit të një huaje me anuitete të barabarta
 - Shembuj aplikacionesh
 - Borxhi i paguar dhe borxhi i mbetur i një huaje

Huat me anuitete të barabarta

- Le të jetë K vlera e huas (borxhi kryesor) së dhënë për n vite me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, për t'u *amortizuar* me anuitete vjetore A , të pagueshëm në fund të çdo viti.
- Të dhënat:
 - K – vlera e tashme e huas,
 - A – vlera e një anuiteti,
 - p – përqindja vjetore e interesit të përbërë,
 - n – numri i viteve të kohëzgjatjes së kontratës.
- Vërejmë se një kontratë huaje është, në fakt, kontrata e rentave periodike me role të ndërruara të debituesit dhe kredituesit.

Huat me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

- Sipas formulës mbi rentat periodike, vlera e tashme e huas është:

$$K = A \frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)}, \quad \text{ku} \quad r = 1 + \frac{p}{100}$$

- Zgjidhim barazimin sipas vlerës A të anuitetit.

Huat me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

Vlera e anitetit të huas

Në qoftë se K është vlera e tashme e huas së dhënë për n vite me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor, vlera e **anuiteteve** të pagueshme në fund të çdo viti është

$$A = K \frac{r^n(r-1)}{r^n-1}.$$

Vlera e anuitetit me kapitalizim vjetor

Example

Kredia prej 50,000 € amortizohet për 12 vjet me 5% (p.a.d) interes (dhe kapitalizim vjetor).
Sa do të jetë anuiteti vjetor?

Vlera e anitetit me kapitalizim vjetor. (Vazhdim)

Solution.

Kemi $K = 50,000$, $p = 5$, $n = 12$,

$$A = K \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1.05.$$

$$A = 50,000 \frac{1.05^{12}(1.05 - 1)}{1.05^{12} - 1} \approx 5,641.27.$$



Vlera e tashme me kapitalizim periodik

Example

Cila hua mund të shlyhet për 10 vjet me anuitete mujore prej 200 € dhe interes 6% (p.a.d) me kapitalizim mujor?

Vlera e anuitetit me kapitalizim periodik

Vlera e anuitetit të huas

Në qoftë se K është vlera e tashme e huas së dhënë për n vite me përqindje interesi $p\%$ (p.a.d) dhe m kapitalizime në vit, vlera e **anuiteteve** të pagueshme m herë në vit është

$$A = K \frac{r^{mn}(r-1)}{r^{mn}-1},$$

ku tani

$$r = 1 + \frac{p}{100m}.$$

Vlera e tashme me kapitalizim periodik. (Vazhdim)

Solution.

Kemi $A = 200$, $p = 6$, $n = 10$, $m = 12$,

$$r = 1 + \frac{p}{100m} = 1 + \frac{6}{100 \cdot 12} = 1.005.$$

$$K = A \frac{r^{mn} - 1}{r^{mn}(r - 1)} = 200 \frac{1.005^{12 \cdot 10} - 1}{1.005^{12 \cdot 10}(1.005 - 1)} \approx 18,014.69.$$



Këstet e huave me anuitete të barabarta

- Secili anuitet është i barabartë me shumën e interesit në *borxhin e mbetur* dhe të pjesës së borxhit kryesor të cilin e kthen, e që quhet *këst*.
- Meqë anuiteti i parë $A = K_1 + \frac{Kp}{100}$, atëherë

$$K_1 = A - \frac{Kp}{100}.$$

- Meqë anuiteti i dytë $A = K_2 + \frac{(K-K_1)p}{100}$, atëherë

$$\begin{aligned} K_2 &= A - \frac{(K - K_1)p}{100} = A - \frac{Kp}{100} + \frac{K_1p}{100} \\ &= K_1 + \frac{K_1p}{100} = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_1 r. \end{aligned}$$

Këstet e huave me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

- Meqë anuiteti i tretë $A = K_3 + \frac{(K - K_1 - K_2)p}{100}$, atëherë

$$\begin{aligned} K_3 &= A - \frac{(K - K_1 - K_2)p}{100} = A - \frac{(K - K_1)p}{100} + \frac{K_2p}{100} \\ &= K_2 + \frac{K_2p}{100} = K_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_2 r = K_1 r^2. \end{aligned}$$

- ...
- Kësti i anuitetit të n -të është

$$K_n = K_1 r^{n-1}.$$

Këstet e huave me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

Example

Huaja prej 300,000 € amortizohet për 15 vjet me anuitete të barabarta vjetore dhe interes 10% (p.a.d) me kapitalizim vjetor.
Të caktohet kësti i fundit.

Këstet e huave me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

Solution.

Kemi $K = 300,000$, $n = 15$, $p = 10$,

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1.1.$$

$$A = 300,000 \frac{1.1^{15}(1.1 - 1)}{1.1^{15} - 1} \approx 39,442.13,$$

$$K_1 = A - \frac{Kp}{100} \approx 39,442.13 - \frac{300,000 \cdot 10}{100} \approx 9,442.13.$$

$$K_{15} = K_1 r^{14} \approx 9,442.13 \cdot 1.1^{14} \approx 35,856.48.$$



Amortizimit i një huaje me anuitete të barabarta

- Shënojmë me
 - I_i interesin për vitin (periodën) i ,
 - K_i këstin e i -të,
 - P_i borxhin e kthyer (pjesën e paguar) pas anitetit të i -të,
 - R_i mbetjen e borxhit pas anitetit të i -të.

1 Interesi:

$$I_i = \frac{R_{i-1}p}{100}$$

- Vërejmë se në rast më tepër kapitalizimesh dhe anitetesh brenda vitit, d.m.th. kur $m \neq 1$

$$I_i = \frac{R_{i-1}p}{100m}$$

Amortizimi i një huaje me anuitete të barabarta. (Vazhdim)

① Kësti:

$$K_i = A - I_i$$

② Borxhi i paguar:

$$P_i = P_{i-1} + K_i$$

③ Borxhi i mbetur:

$$R_i = R_{i-1} - K_i$$

Plani i amortizimit

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				K	
1	$\frac{R_0 p}{100m}$	$A - I_1$	A	$R_0 - K_1$	$P_0 + K_1$
2	$\frac{R_1 p}{100m}$	$A - I_2$	A	$R_1 - K_2$	$P_1 + K_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
mn	$\frac{R_{n-1} p}{100m}$	$A - I_n$	A	$R_{n-1} - K_n$	$P_{n-1} + K_n$

Plani i amortizimit me kapitalizim vjetor

Example

Huaja prej 100,000 € amortizohet me anuitete të barabarta vjetore për 5 vjet me interes 7% (p.a.d) dhe kapitalizim vjetor. Të përpilohet plani i amortizimit.

Plani i amortizimit me kapitalizim vjetor. (Vazhdim)

Solution....

Kemi $K = 100,000$, $n = 5$, $p = 7$,

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{7}{100} = 1.07$$

$$A = K \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 100,000 \frac{1.07^5(1.07 - 1)}{1.07^5 - 1} \approx 24,389.07$$



Plani i amortizimit me kapitalizim vjetor. (Vazhdim)

...Solution.

i	I_i	K_i	A_i	R_i	P_i
0				100,000	
1	7,000	17,389.07	24,389.07	82,610.93	17,389.07
2	5,782.77	18,606.30	24,389.07	64,004.63	35,995.37
3	4,480.32	19,908.75	24,389.07	44,095.88	55,904.12
4	3,086.71	21,302.36	24,389.07	22,793.52	77,206.48
5	1,595.55	22,793.52	24,389.07	0	100,000



Borxhi i paguar dhe borxhi i mbetur i një huaje

- ① Borxhi i paguar:

$$\begin{aligned}P_i &= K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_i \\&= K_1 + K_1 r + K_1 r^2 + \dots + K_1 r^{i-1} \\&= K_1(1 + r + r^2 + \dots + r^{i-1})\end{aligned}$$

- ② Formula:

$$P_i = K_1 \frac{r^i - 1}{r - 1}$$

- ③ Borxhi i mbetur:

$$R_i = K - P_i$$

Borxhi i paguar dhe borxhi i mbetur i një huaje. (Vazhdim)

Example

Huaja prej 400,000 € amortizohet për 20 vjet me anuitete të barabarta semestrale dhe interes 8% (p.a.d) e kapitalizim semestral.

Të gjendet:

- 1 pjesa e shlyer e borxhit pas 30 anuiteteve të paguara,
- 2 borxhi i mbetur pas 30 anuiteteve të paguara.

Udhëzime për lexim të mëtejme

- <http://www.fberisha.org>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 90–101.

Përfundim

- Lidhmëria ndërmjet një huaje me anuitete të barabarta dhe rentave periodike
- Llogaritja e anuiteteve të barabarta të huave
- Përpilimi i një plani amortizimi të një huaje me anuitete të barabarta
 - vjetore
 - periodike