

Përcaktorët e matricave të rendeve të larta

F. M. Berisha, N. Berisha



Universiteti i Prishtinës

Qëllimet dhe objektivat

- Llogaritja e vlerave të përcaktorëve të matricave katrore të rendit të katërtë ose më tepër, duke i zbërthyer sipas një rreshti ose shtylle.
- Zbatimi i përcaktorëve të rendeve të larta për zgjidhjen e sistemeve të më tepër ekuacioneve lineare me metodën e Cramer-it.

Përbajtja

- 1 Sistemet e katër ekuacionesh lineare
- 2 Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori
- 3 Përcaktorët e matricave të rendeve të larta
- 4 Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare

Shembull sistemi katër ekuacionesh lineare

Shembull (...)

Një korporatë përbëhet nga 4 departamente.

Produktiviteti i secilit departament ndikon nevojat e punës
të departamenteve tjera.

Paraqitni ekuacionet për llogaritjen e vëllimeve të prodhimit
të departamenteve në qoftë se...

Shembull sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

Shembull

...tabela vijuese tregon sasinë e prodhimit të departamentit të i -të të nevojshme për prodhimin e një njësie të departamentit të j -të, dhe sasitë e produkteve finale të planifikuara për departament.

Dept.	Koeficientët				Prodhimi final
	1	2	3	4	
1	0.1	0.1	0.2	0.1	500
2	0.2	0.3	0.3	0.2	100
3	0.2	0.1	0.3	0.1	200
4	0.2	0	0	0.1	1000

Tabela: Koeficientët e ndikimeve ndërmjet departamenteve

Shembull sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

Zgjidhje....

Shënojmë me q_1, q_2, q_3, q_4 sasitë (të panjohura)

e prodhimit të departamentit 1, 2, 3 përkatësisht 4.

Atëherë, vëllimet e prodhimit të secilit nga departamentet mund të paraqiten me ekuacionet vijuese:

$$q_1 = 0.1q_1 + 0.1q_2 + 0.2q_3 + 0.1q_4 + 500$$

$$q_2 = 0.2q_1 + 0.3q_2 + 0.3q_3 + 0.2q_4 + 100$$

$$q_3 = 0.2q_1 + 0.1q_2 + 0.3q_3 + 0.1q_4 + 200$$

$$q_4 = 0.2q_1 + 0q_2 + 0q_3 + 0.1q_4 + 1000.$$



Shembull sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

Pas grupimit të të panjohurave nga anët e majta të barazimeve, fitojmë sistemin e katër ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned} 0.9q_1 - 0.1q_2 - 0.2q_3 - 0.1q_4 &= 500 \\ -0.2q_1 + 0.7q_2 - 0.3q_3 - 0.2q_4 &= 100 \\ -0.2q_1 - 0.1q_2 + 0.7q_3 - 0.1q_4 &= 200 \\ -0.2q_1 &\quad + 0.9q_4 = 1000. \end{aligned}$$



Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori

Le të jetë A një matricë katrore e rendit n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori. (Vazhdim)

Minorët dhe kofaktorët

- Nëse largojmë nga matrica A rreshtin e i -të dhe shtyllën e j -të, përcaktori i matricës së mbetur katore të rendit $n - 1$ quhet ***minor*** i matricës A , dhe zakonisht e shënojmë me M_{ij} .
- Prodhimi

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

i minorit me parashenjën përkatëse, quhet ***kofaktor*** i a_{ij} .

Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori. (Vazhdim)

Shembull

Llogaritni kofaktorët e matricës

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje....

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$



Minorët dhe kofaktorët e një përcaktori. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$



Përcaktorët e matricave të rendeve të larta

Përcaktori i një matrice të rendit n ...

Përcaktori i një matrice A të rendit n ($n > 1$) është shuma e prodhimeve të elementeve të një rreshti ose një shtylle me kofaktorët e vetë;

Përcaktorët e matricave të rendeve të larta. (Vazhdim)

...Përcaktori i një matrice të rendit n

d.m.th., sipas rreshtit të i -të

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in},$$

ose sipas shtyllës së j -të

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj}.$$

Përcaktorët e matricave të rendeve të larta. (Vazhdim)

Shembull

Llogaritni përcaktorin e matricës vijuese të rendit të katërtë

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zgjidhje....

$$\det A = 0 \cdot \alpha_{31} + 1 \cdot \alpha_{32} + 0 \cdot \alpha_{33} + 1 \cdot \alpha_{34}$$



Përcaktorët e matricave të rendeve të larta. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^5 \cdot 10 + (-1)^7 \cdot 12 = -22.
 \end{aligned}$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare

Shembull

Zgjidhni sistemin e katër ekuacioneve lineare

$$\begin{aligned}0.9q_1 - 0.1q_2 - 0.2q_3 - 0.1q_4 &= 500 \\-0.2q_1 + 0.7q_2 - 0.3q_3 - 0.2q_4 &= 100 \\-0.2q_1 - 0.1q_2 + 0.7q_3 - 0.1q_4 &= 200 \\-0.2q_1 &\quad + 0.9q_4 = 1000.\end{aligned}$$

Zgjidhje....

Sipas metodës së Cramer-it kemi

$$q_1 = \frac{d_1}{\det A}, \quad q_2 = \frac{d_2}{\det A}, \quad q_3 = \frac{d_3}{\det A}, \quad q_4 = \frac{d_4}{\det A},$$

Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

ku

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 0.7 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0.9 \end{vmatrix}$$

$$= -0.2 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44}$$

$$= \dots = 0.3096,$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \begin{vmatrix} 500 & -0.1 & -0.2 & -0.1 \\ 100 & 0.7 & -0.3 & -0.2 \\ 200 & -0.1 & 0.7 & -0.1 \\ 1000 & 0 & 0 & 0.9 \end{vmatrix} \\
 &= 1000 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44} \\
 &= \dots = 326.7,
 \end{aligned}$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$d_2 = \begin{vmatrix} 0.9 & 500 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 100 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 200 & 0.7 & -0.1 \\ -0.2 & 1000 & 0 & 0.9 \end{vmatrix}$$
$$= -0.2 \cdot \alpha_{41} + 1000 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44}$$
$$= \dots = 383.5,$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$\begin{aligned}
 d_3 &= \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & 500 & -0.1 \\ -0.2 & 0.7 & 100 & -0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 200 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 1000 & 0.9 \end{vmatrix} \\
 &= -0.2 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 1000 \cdot \alpha_{43} + 0.9 \cdot \alpha_{44} \\
 &= \dots = 296.1,
 \end{aligned}$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

$$\begin{aligned}
 d_4 &= \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 & -0.2 & 500 \\ -0.2 & 0.7 & -0.3 & 100 \\ -0.2 & -0.1 & 0.7 & 200 \\ -0.2 & 0 & 0 & 1000 \end{vmatrix} \\
 &= -0.2 \cdot \alpha_{41} + 0 \cdot \alpha_{42} + 0 \cdot \alpha_{43} + 1000 \cdot \alpha_{44} \\
 &= \dots = 416.6.
 \end{aligned}$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje....

Prandaj,

$$q_1 = \frac{d_1}{\det A} = \frac{326.7}{0.3096} \approx 1,055.23,$$

$$q_2 = \frac{d_2}{\det A} = \frac{383.5}{0.3096} \approx 1,238.70,$$

$$q_3 = \frac{d_3}{\det A} = \frac{296.1}{0.3096} \approx 956.40,$$

$$q_4 = \frac{d_4}{\det A} = \frac{416.6}{0.3096} \approx 1,345.61.$$



Zgjidhja e një sistemi katër ekuacionesh lineare. (Vazhdim)

...Zgjidhje.

Përfundimisht, meqë në zbatimin tonë q_1, q_2, q_3, q_4 paraqesin sasi prodhimi të shprehur në njësi, kemi

$$q_1 \approx 1,055, \quad q_2 \approx 1,239, \quad q_3 \approx 956, \quad q_4 \approx 1,346.$$



Udhëzime për lexim të mëtejshmë

- <http://www.fberisha.org>
- **Detyrë shtëpie:** Detyrat për ushtrime nga materiali mësimor.
- F. M. Berisha, M. Q. Berisha, *Matematikë – për biznes dhe ekonomiks*, fq. 19–28.

Përfundim

- Llogaritja e minorëve dhe kofaktorëve të një përcaktori
- Zbatimi i kofaktorëve për të zbërthyer një përcaktor sipas një rreshti ose një shtylle
- Llogaritja e përcaktorëve të rendit të katërtë
- Zbatimi i përcaktorëve të rendit të katërtë për zgjidhjen e një sistemi të katër ekuacionesh lineare me metodën e Cramer-it