Statistikë e aplikuar

UNIVERSITETI I EJL
ЈИЕ УНИВЕРЗИТЕТ
SEE UNIVERSITY

Intervalet e besueshmërisë

Faton Berisha

Kapitulli 7

Intervalet e besueshmërisë

Intervalet e besueshmërisë

7.1 Intervalet e besueshmërisë të një mostre të madhe për mesatare popullimi

7.2 Intervalet e besueshmërisë të një mostre të vogël për mesatare popullimi

7.3 Përcaktimi i madhësisë së mostrës

7.4 Intervalet e besueshmërisë për proporcion popullimi

7.5 Një krahasim ndërmjet intervaleve të besueshmërisë dhe intervaleve të tolerancës (Opcionale)

Intervalet e besueshmërisë të një mostre të madhe për një mesatare.

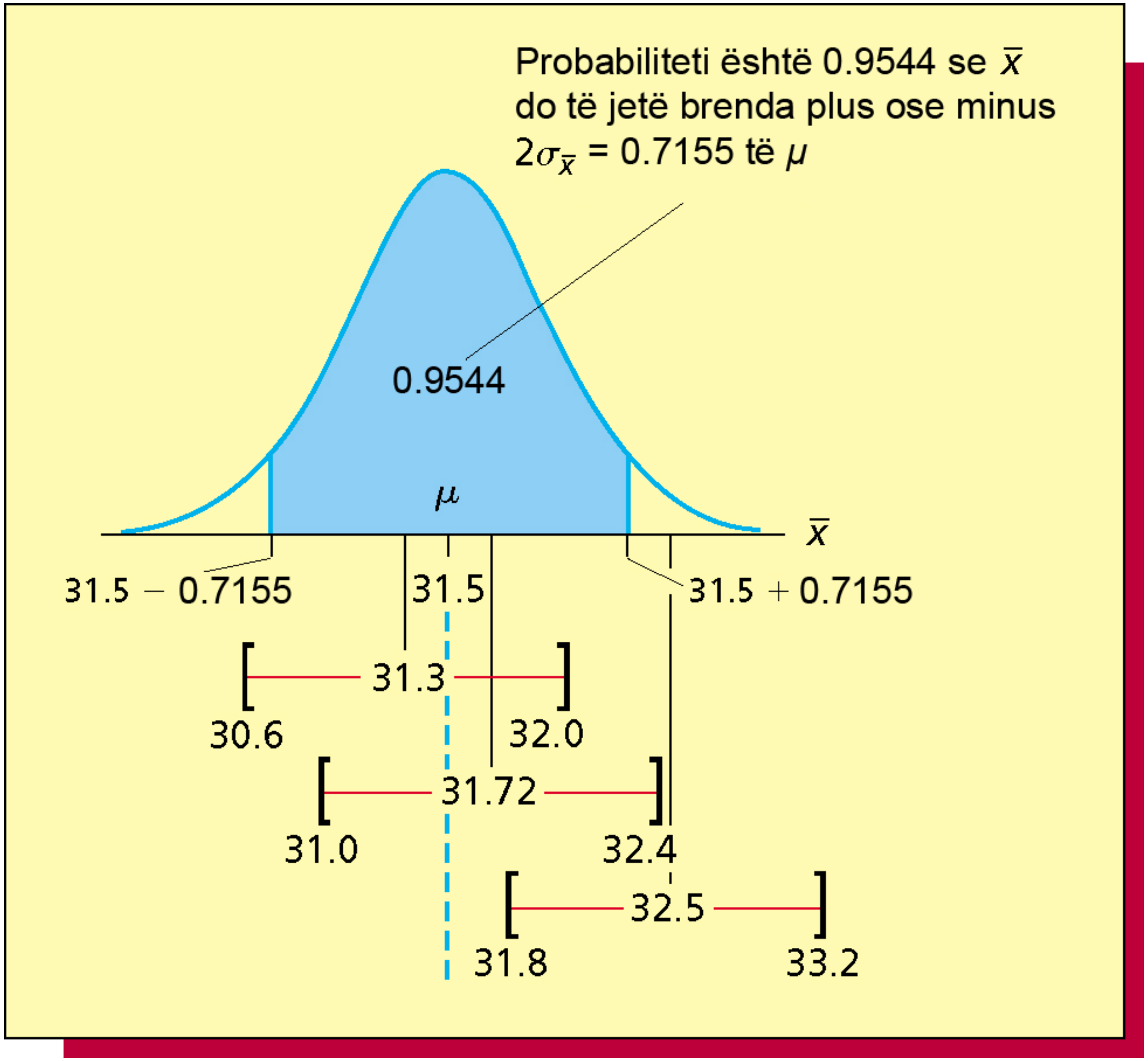
- Rikujtoni shpërndarjen e zgjedhjeve të mesatares së mostrës:
  - Në qoftë se popullimi është me shpërndarje normale me mesatare μ dhe devijim standard σ, atëherë shpërndarja e zgjedhejeve e $\bar{x}$ është normale me mesatare $\mu_{\bar{x}} = \mu$ dhe devijim standard $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$
  - Shfrytëzoni lakore normale si model të shpërndarjes së zgjedhjeve të mesatares së mostrës
    - Saktësisht, sepse popullimi është normal
    - Përafërsisht, sipas teoremës qendrore limit për mostra të mëdha

Rregulla empirike

- Rikujtoni rregullën empirike:
  - 68.26% të të gjitha mesatareve të mostrave janë brenda një devijimi standard të mesatares së popullimit.
  - 95.44% të të gjitha vlerave të mundshme të observuara të $\bar{x}$ janë brenda dy devijimesh standarde të mesatares së popullimit.
  - 99.73% të të gjitha vlerave të mundshme të observuara të $\bar{x}$ janë brenda tri devijimesh standarde të mesatares së popullimit

Tre 95.44% intervalet e besueshmërisë për μ

- Shembulli i kilometrazhit të veturave
  - Probabiliteti është poashtu 0.9544 se μ do të jetë brenda plus ose minus $2\sigma_{\bar{x}}$ të $\bar{x}$.



Përgjithësim

- Në shembullin, gjetëm probabilitetin se μ përmbahet në një interval shumfishës të plotë të $\sigma_{\bar{x}}$ nga $\bar{x}$.
- Më e zakonshem të specifikohet probabiliteti dhe gjendet numri përkatës i devijimeve $\sigma_{\bar{x}}$
- Probabiliteti se *intervali i besueshmërisë* **nuk** do të përmbajë mesataren e populllimit μ shënohet me α.
  - Në shembullin, $\alpha = 1 - 0.9544 = 0.0456$

Generalizing Continued

- Probabiliteti që intervali i besueshmërisë të përmbajë mesataren e popullimit μ është $1 - \alpha$
  - $1 - \alpha$ quhet *koeficienti i besueshmërisë*
  - $(1 - \alpha)$ 100% quhet *niveli i besueshmërisë*
- Zakonisht për $1 - \alpha$ përdoren probabilitete me dy pika decimale.
  - Në shembullin, $1 - \alpha = 0.95$

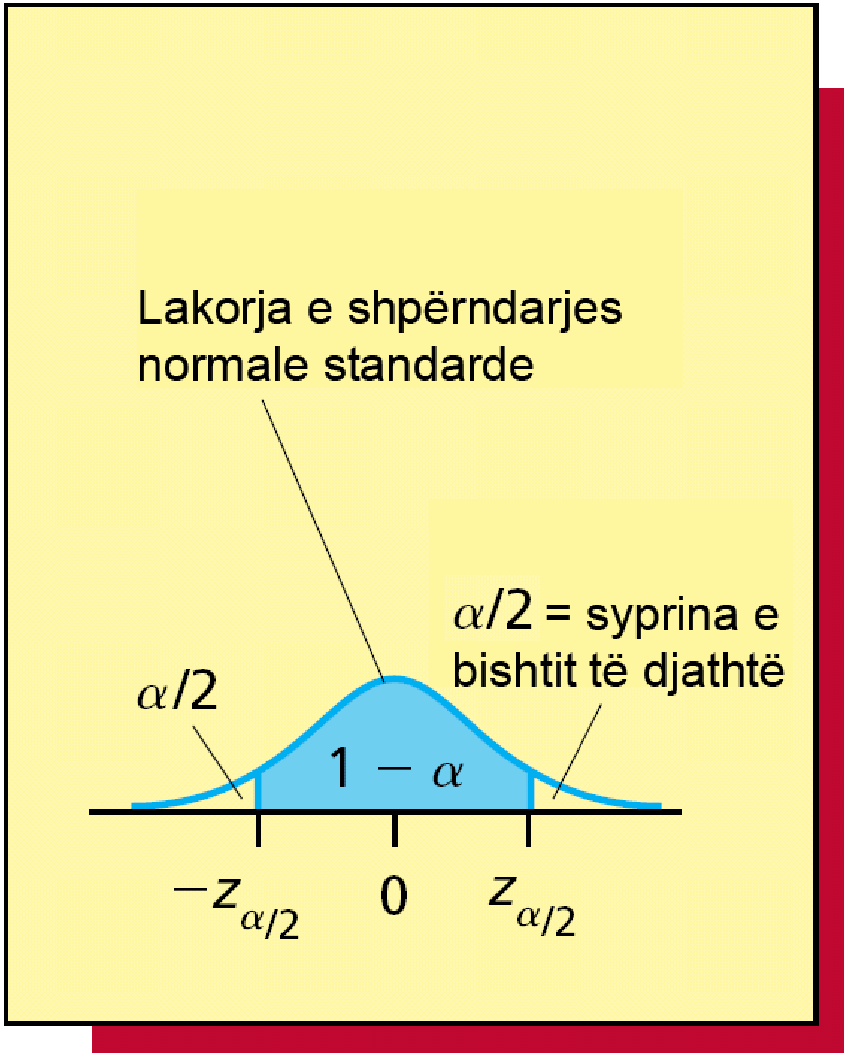
Intervali i përgjithshëm i besueshmërisë

- Në përgjithësi, në qoftë se popullacioni është normal ose mostra është e madhe ($n \geq 30$), 100(1 – α)% *intervali i besueshmërisë* për μ është

$$\left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}}\right] = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  - Pika normale standarde $z_{\alpha/2}$ përcakton syprinën e bishtit të djathtë nën lakoren normale standarde të barabartë me $\alpha / 2$
  - Pika normale standarde $-z_{\alpha/2}$ përcakton syprinën e bishtit të majtë nën lakoren normale standarde të barabartë me $\alpha/2$
  - Syprina nën lakoren normale standarde ndërmjet $-z_{\alpha/2}$ dhe $z_{\alpha/2}$ është $1 – \alpha$

Shpërndarja e zgjedhjeve e të gjitha
mesatareve të mostrave të mundshme



Intervali i besueshmërisë së një mostre të madhe për një mesatare

- Në qoftë se popullimi ka devijim standard σ (të njohur),
- dhe në qoftë se popullimi është normal ose madhësia e mostrës është e madhe ($n \geq 30$), atëherë …
- … **(1 – α) 100% intervali i besueshmërisë për μ** është

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- Njihet edhe si: *intervali i besueshmërisë i z-mbështetur për mesatare me σ të njohur.*

Rasti i kilometrazhit të veturave

- Shembulli 7.1.
  - $n = 49$, $\mu = 31.5531$, $s = 0.7992$
  - Gjeni 95% intervalin e besueshmërisë së mesatares μ të kilometrazheve të popullimit të të gjitha veturave.
  - $1 - \alpha = 0.95$
    $\alpha = 0.05$
  - $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$

95% niveli i besueshmërisë

- Për nivel besueshmërie 95%,

  $1 - \alpha = 0.95$

  $\alpha = 0.05$

  $\alpha/2 = 0.025$

- Për nivel besueshmërie 95%, nevojitet pika $z_{0.025}$
  - Syprina nën lakoren normale standarde ndërmjet $-z_{0.025}$ dhe $z_{0.025}$ është 0.95
  - Atëherë, syprina nën lakoren normale standarde ndërmjet 0 dhe $z_{0.025}$ është 0.475
  - Nga tabela normale standarde, syprina është 0.475 for $z = 1.96$
  - Prandaj $z_{0.025} = 1.96$

95% intervali i besueshmërisë

❖ 95% intervali i besueshmërisë është

$$\left[\bar{x} \pm z_{0.025}\,\sigma_{\bar{x}}\right] = \left[\bar{x} \pm 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[\bar{x} - 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

99% intervali i besueshmërisë

- Për 99% besueshmëri, duhet pika $z_{0.005}$
  - Nga tabela normale standarde, sipërfaqja është 0.495 për $z_{0.005} = 2.575$
- 99% intervali i besueshmërisë është

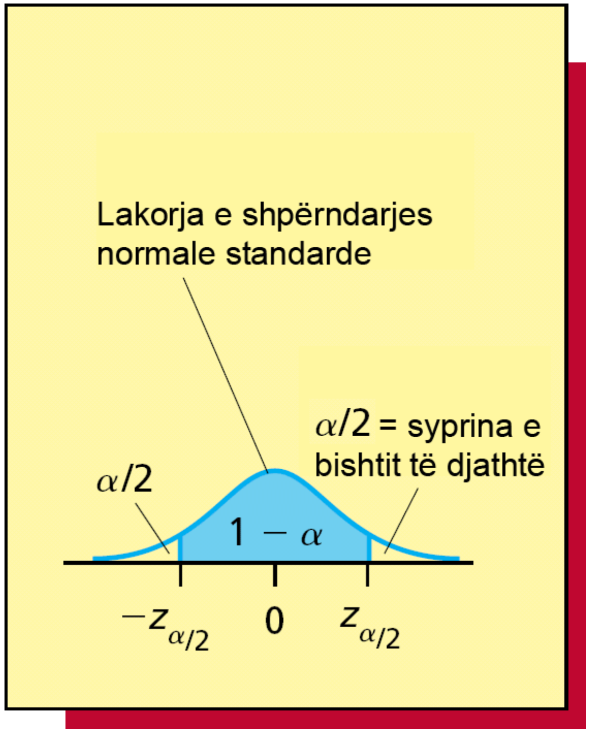
$$\left[\bar{x} \pm z_{0.005}\sigma_{\bar{x}}\right] = \left[\bar{x} \pm 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

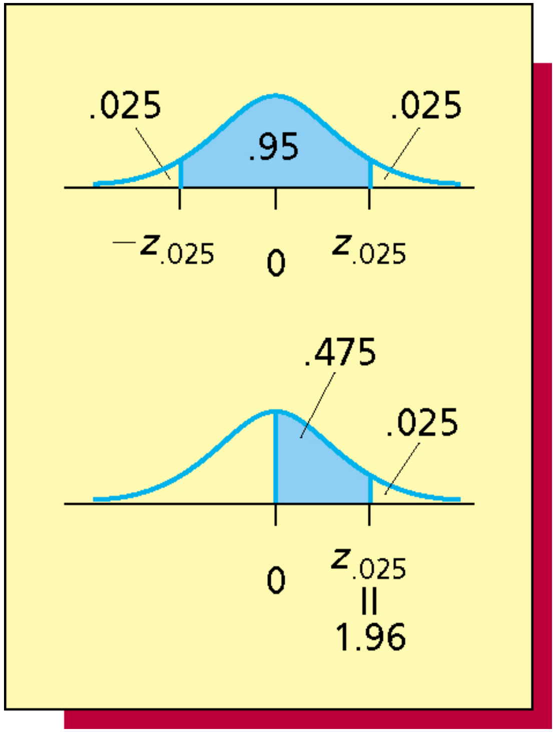
$$= \left[\bar{x} - 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

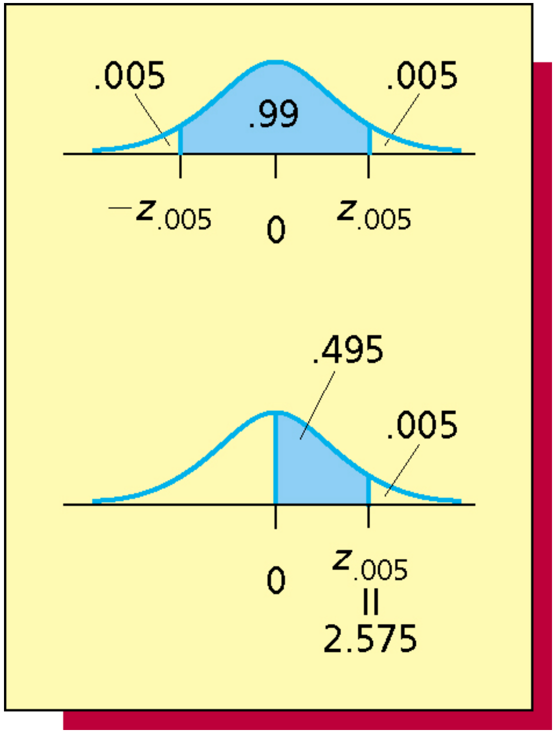
Efekti i α në gjerësinë e intervalit të besueshmërisë

$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.575$







Intervalet e besueshmërisë të një mostre të vogël për një mesatare

- Në qoftë se σ është e panjohur (e që zakonisht është), mund të konstruktohet një interval konfidence për μ mbështetur në shpërndarjen e zgjedhjeve të

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

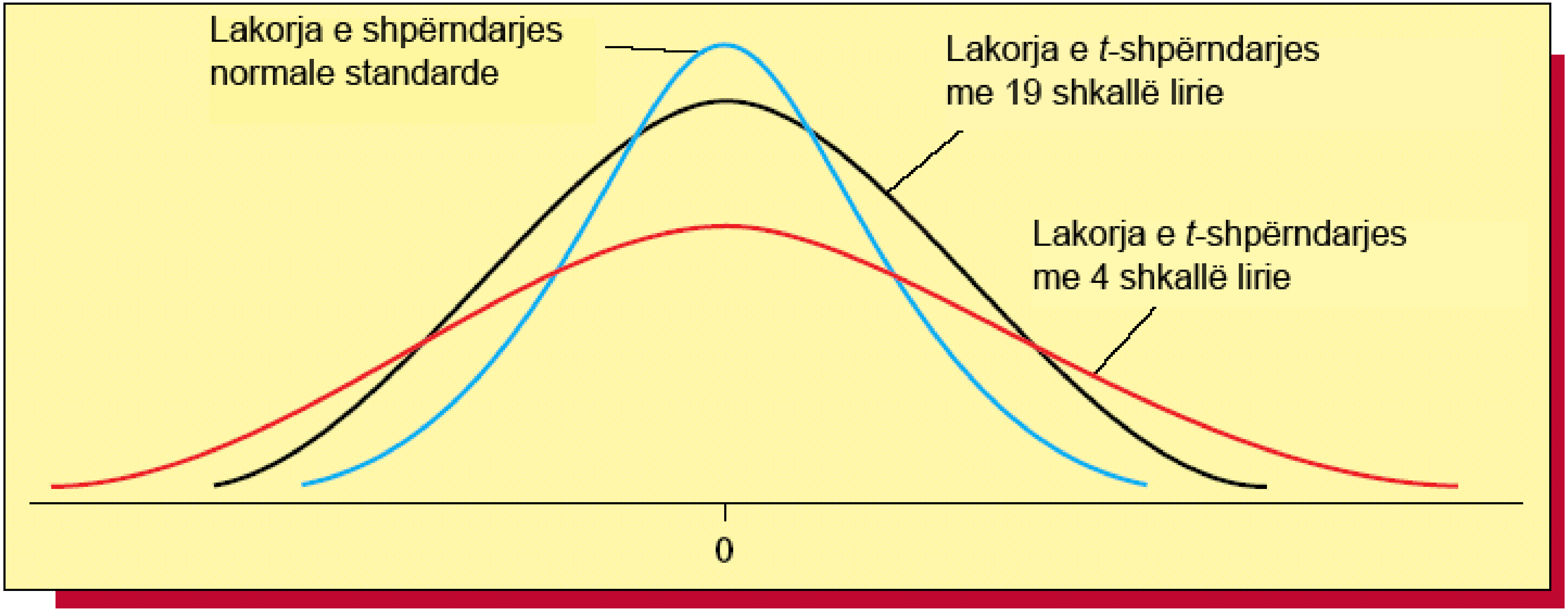
- Në qoftë se popullimi është normal, atëherë për çfarëdo madhësie n të mostrës, kjo shpërndarje e zgjedhjeve quhet *t-shpërndarje*.

t-shpërndarja

- *t*-lakorja e t-shpërndarjes është e ngjashme me atë të lakores normale standarde
  - Simetrike dhe në formë këmbane
  - *t*-shpërndarja është më e përhapur sesa shpërndarja normale standarde
  - Përhapja e *t*-shpërndarjes jepet me ***numrin e shkallëve të lirisë***
    - Shënohet me *df*
    - Një mostër e madhësisë *n* ka për një më pak shkallë lirie, d.m.th.

$$df = n - 1$$

Shkallët e lirisë dhe *t*-shpërndarja



Me rritjen e numrit të shkallëve të lirisë, përhapja e t-shpërndarjes zvogëlohet dhe t-lakorja i afrohet lakores normale standarde.

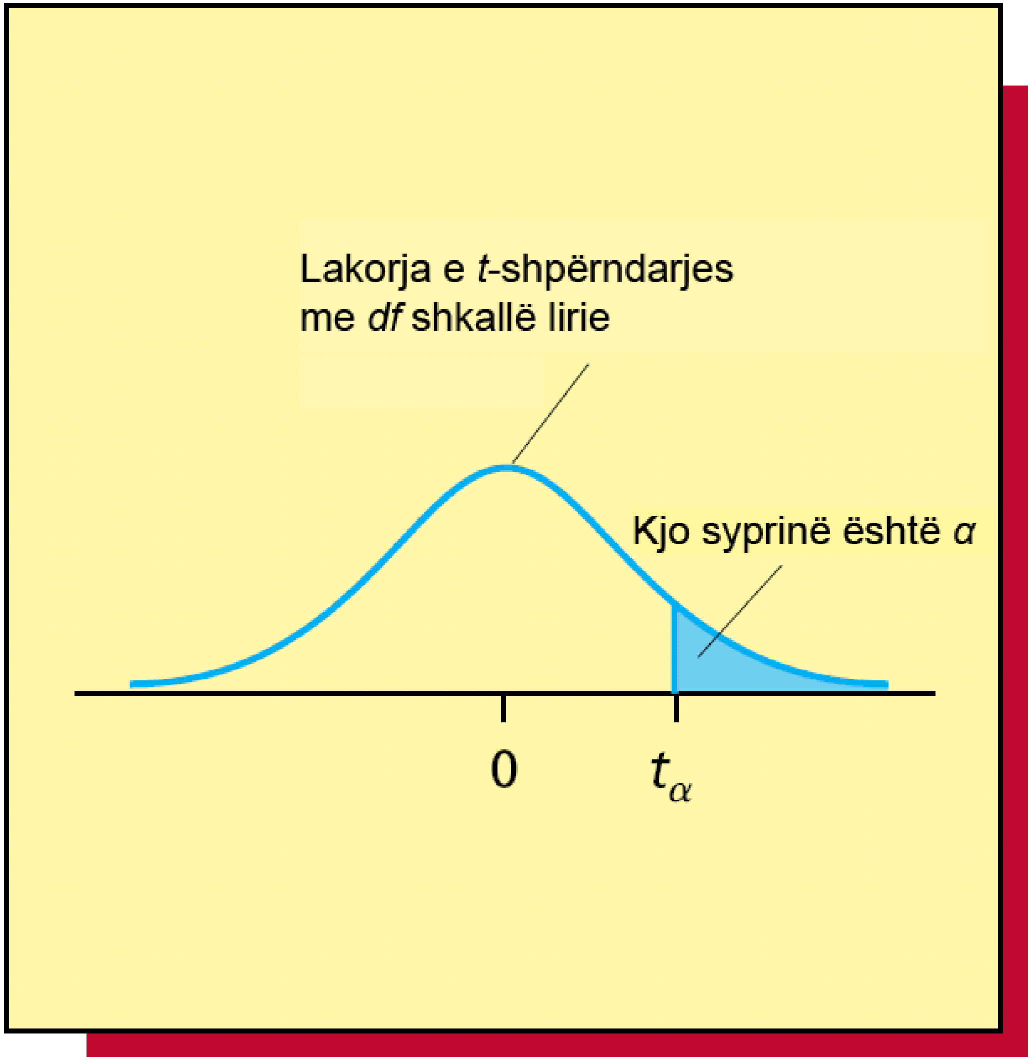
t-shpërndarja dhe shkallët e lirisë

- Për një *t*-shpërndarje me $n - 1$ shkallë liri,
  - me rritjen e madhësisë n të mostrës, rriten edhe shkallët e lirisë
  - me rritjen e shkallëve të lirisë, përhapja e *t*-lakores zvogëlohet
  - me rritjen e pafundme të shkallëve të lirisë, *t*-lakorja i afrohet lakores normale standarde.
    - Në qoftë se $n \geq 30$, pra $df = n - 1 \geq 29$, *t*-lakorja është shumë e ngjashme me lakoren normale standarde.

Syprinat e bishtave të djathtë të *t*-shpërndarjes

- Shfrytëzohet t-pikë që shënohet me t_α
  - t_α është pika në boshtin horizontal nën t-lakoren që përcakton bishtin e djathtë të barabartë me α.
  - Pra, vlera e t_α në një situatë të caktuar varet nga syprina e bishtit të djathtë α dhe nga numri i shkallëve të lirisë
    - $df = n - 1$
    - $1 - \alpha$ koeficienti i specifkuar i besueshmërisë

Syprinat e bishtave të djathtë të *t*-shpërndarjes. (Vazhdim)



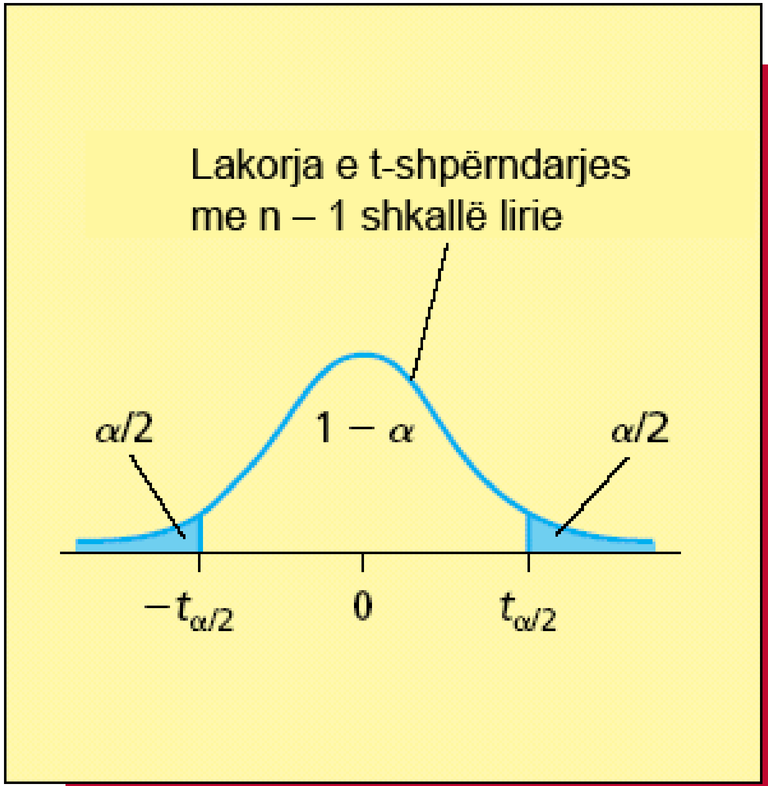
Shfrytëzimi i tabelës së t-shpërndarjes

- Rreshtat u përkasin vlerave të ndryshme të *df*
- Shtyllat u përkasin vlerave të ndryshme të α
- Shikoni tabelën 7.3 (Tab. A.4, A.20 dhe në kopertinë).
  - Tabela 7.3 jep t-pikat për *df* 1 deri 30, pastaj për *df* = 40, 60, 120 dhe ∞.
    - Në rreshtin për ∞, t-pikat janë z-pika.
  - Tabela A.20 jep t-pikat për *df* 1 deri 100
    - Për *df* më të madh se 100, t-pikat mund të përafrohen me anë të z-pikave përkatëse në rreshtin për $df = \infty$.
  - Gjithmonë shikoni figurën shoqëruese për mënyrën e shfrytëzimit të tabelës.

Intervalet e besueshmërisë sipas t për një mesatare: σ e panjohur

Në qoftë se popullacioni është me shpërndarje normale me mesatare μ, atëherë $100(1 - \alpha)\%$ intervali i besueshmërisë për μ është

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$



$t_{\alpha/2}$ është t-pika që përcakton syprinën e bishtit të djathtë të barabartë me $\alpha/2$ nën t-lakoren me $n - 1$ shkallë lirie.

Përcaktimi i madhësisë së mostrës (z)

Në qoftë se σ është e njohur,
atëherë zgjedhet mostër e madhësisë

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E} \right)^2$$

ashtu që $\bar{x}$ të jetë brenda E njësishë të μ,
me 100(1 – α)% besueshmëri.

Përcaktimi i madhësisë së mostrës (t)

Në qoftë se σ është e panjohur dhe vlerësohet me s, atëherë zgjedhet mostër e madhësisë

$$n = \left(\frac{t_{\alpha/2}\, s}{E} \right)^2$$

ashtu që $\bar{x}$ të jetë brenda E njësishë të μ, me $100(1 - \alpha)\%$ besueshmëri.

Numri i shkallëve të lirisë për $t_{\alpha/2}$ dhe s merren nga mostra preliminare.

Intervalet e konfidencës për një proporcion popullimi

Në qoftë se madhësia e mostrës është e madhe*, atëherë 100(1 – α)% intervali i besueshmërisë për p është

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n-1}}$$

* Vlera e n konsiderohet e madhe në qoftë se

$$n \cdot \hat{p} \geq 5 \quad \text{dhe} \quad n \cdot \left(1-\hat{p}\right) \geq 5$$

Shembull: Rasti i ambalazhit të djathit

- Shembulli 7.7
  - n = 1,000, $\hat{p} = 63/1000 = 0.063$
  - Gjejmë 95% intervalin e besueshmërisë për p
  - α = 1 – 0.95 = 0.05

    $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

$$\left[\hat{p} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}\right] = \left[0.063 \pm 1.96\sqrt{\frac{(0.063)(0.937)}{1000-1}}\right]$$

$$= [0.0479,\ 0.0781]$$

Përcaktimi i madhësisë së mostrës për intervalin e besueshmërisë për *p*

Mostër e madhësisë

$$n = p(1-p)\left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2$$

do të japë një përafrim $\hat{p}$ saktësisht brenda *E* njësish të *p*, me 100(1 – *α*)% besueshmëri.

Në qoftë se nuk ka kurrëfarë informate paraprake mbi *p*, përdoret vlera konvencionale $p = 0.5$.

Krahasim intervalesh të besueshmërisë dhe intervalesh të tolerancës

Një **interval tolerance** përmban një përqindje të dhënë masash individuale të popullimit.

- Shpesh 68.26%, 95.44%, 99.73%

Një **interval besueshmërie** ka të bëjë me përfshierjen e mesatares μ të popullimit, dhe niveli i besueshmërisë shpreh se sa të sigurtë jemi që ky interval aktualisht përmban μ.

- Shpesh niveli i besueshmërisë vëhet i lartë (psh., 95% ose 99%).
  - Sepse niveli i tillë konsiderohet mjaft i lartë për të siguruar dëshmi bindëse mbi vlerën e μ