

Shprehjet, numrat kompleksë, polinomet dhe thyesat në Maxima

Qëllimet dhe objektivat

- Funksionet e Maxima që lejojnë manipulimin me shprehje algjebrike, logaritmike, eksponenciale dhe trigonometrike.
- Manipulimi me faktorielë dhe funksionet relevante
- Veprimet me numra kompleksë

Përmbajtja

- 1 Manipulimi i shprehjeve algjebrike
- 2 Funksionet speciale
- 3 Manipulimi me shprehje trigonometrike
- 4 Manipulimi me numra dhe shprehje komplekse
- 5 Manipulimi me shprehje

Manipulimi i shprehjeve algjebrike

- Menyja *Simplify*
- Funksionet vijuese mund të përdoren për thjeshtim shprehjesh algjebrike si polinome dhe thyesa:

`ratsimp()`: thjeshto shprehje
`radcan()`: thjeshto radikale
`factor()`: faktorizo shprehje
`gfactor()`: faktorizim kompleks

`expand()`: zgjero shprehje
`logexpan=super`: zgjero logaritma
`logcontract()`: ngushto logaritma

Thjeshtimi i shprehjeve

- Shprehjet racionale thjeshtohen me anë të funksionit `ratsimp()`:

```
ratsimp(x^2*y^2*z+a*x*y^2*z-3*x*y^2*z-3*a*y^2*z
      -2*x^2*y^2-2*a*x*y^2+6*x*y^2+6*a*y^2);
ratsimp(x+y/(x+2)+z/(x^2+4));
ratsimp(x*(x+2+(x-3)*(x+4)));
ratsimp(x+2*x/(x-1)+3*x^2/(x^2+4));
```

Thjeshtimi i radikaleve

- Funksioni `radcan()` thjeshton në formë kanonike shprehje që përfshijnë logaritma, eksponente dhe radikale:

```
(%e^(-x)+%e^x)/(%e^(-x)-%e^x);
```

```
radcan(%);
```

```
(log(x+x^2)-log(x))^n/(log(1+x)^(n/2));
```

```
radcan(%);
```

```
(x+2*sqrt(x)+1)/(1+sqrt(x));
```

```
radcan(%);
```

Faktorizimi i shprehjeve

- Funksioni `factor()` faktorizon shprehje algjebrike nëpër numra të plotë:

```
factor(x^4-9*x^3+9*x^2+85*x-150);
```

```
factor(x^2*y^2*z+a*x*y^2*z-3*x*y^2*z-3*a*y^2*z  
      -2*x^2*y^2-2*a*x*y^2+6*x*y^2+6*a*y^2);
```

```
factor((x^2+3*x-10)/(x^2+8*x+12));
```

```
factor(238574);
```

```
factor(2342234);
```

```
factor(2^15+1);
```

Faktorizimi kompleks

- Funksioni `gfactor()` sforcon faktorizimin e polinomeve nëpër numra të plotë gaussianë (kompleksë):

```
factor(x^2+4);
```

```
gfactor(x^2+4);
```

```
factor(x^4+64);
```

```
gfactor(x^4+64);
```


Zgjerimi i shprehjeve

- Funkzioni `expand()` zgjeron shprehje algebrike dhe thyesa:
`expand(x*(x-1)*(x-2)^2);`
`expand((x^2+2*x+2)/(x^2-2*x+2));`
`ratsimp(%);`
`num((x^2+2*x+2)/(x^2-2*x+2));`
`denom((x^2+2*x+2)/(x^2-2*x+2));`
- Operatori postfix `logexpand=super` zgjeron një logaritëm në shumë ose diferencë të logaritmave:
`log(x*y), logexpand=super;`
`log(y^k), logexpand=super;`
`log(x/y^k), logexpand=super;`

Ngushtimi i logaritmave

- Funksioni `logcontract()` performon të kundërtën e operatorit postfix `logexpand=super`:

```
logcontract(log(x)+log(y));
```

```
logcontract(2*log(y));
```

```
logcontract(log(x)-3*log(y));
```

Kombinatorikë

- Faktorielët llogariten me anë të operatorit postfix !:

$[0!, 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, 6!, 7!, 8!, 9!, 10!];$

- Kombinacionet

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

p.sh., $\binom{5}{3}$:

$5!/(3!*(5-3)!);$

- Funksioni combination(n,r) në pakon functs llogarit drejtpërdrejt $\binom{5}{3}$:

```
?? combination;
load(functs);
combination(5,3);
```

Shembull

Shembull

Gjeni numrin e zerove me të cilat përfundon numri $125!$.

Zgjidhje

Numri i faktorëve 5 në $n!$:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \log_5 n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{5^k} \right\rfloor.$$

Për $n = 125$,

$$\frac{125}{5} + \frac{125}{25} + \frac{125}{125} = 31.$$

Shembull (Vazhdim)

Zgjidhje në Maxima

```
z(n):=sum(floor(n/5^k), k, 1, floor(log(n)/log(5)));  
z(125);  
%, simpsum;  
float(%);  
  
125!;  
set_display(ascii);  
125!;  
set_display(xml);
```

Kombinatorikë (Vazhdim)

- Permutacionet:
`permutations([a, b, c]);`
- Funkzioni `permutation(n,r)` në pakon `functs` llogarit numrin e permutacioneve (ose të variacioneve):
`?? permutation;`
`permutation(3,3);`
`permutation(5,3);`

Gama funksioni

- Gama funksioni

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

kalkulohet në Maxima me anë të funksionit `gamma()`:

`[gamma(x), gamma(3), gamma(-2.5), gamma(12.5)]`;
`gamma(0)`; `gamma(-2)`;

- Në matematikë vërtetohet se për $n \in \mathbb{N}$ vlen $\Gamma(n) = (n-1)!$. Kështu, gama funksioni lejon përgjithësimim e nocionit të faktorielit për numra realë:

$$x! = \Gamma(x+1)$$

`[2.5!, 3.5!, (-1.2)!, -1.2!, 1.2!]`;

Beta funksioni

- Beta funksioni përkufizohet me anë të gama funksionit:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

dhe në Maxima kalkulohet me anë të funksionit `beta()`:

```
[beta(2,3), beta(3,2), beta(1.2,3.5),  
beta(-1.2,2.5)];
```


Manipulimi me faktorialë, gama dhe beta funksione

- Menyja *Simplify > Factorials and Gamma*
- Thjeshtimi dhe zbërthimi i faktorialëve

```
minfactorial((n+1)!/(n+3)!);  
factcomb((n+1)*n!^2);
```

Shembull

Gjeni $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Zgjidhje

```
(n-1)!/(k!*(n-1-k)!)+(n-1)!/((k-1)!*(n-k)!);  
ratsimp(%);  
factor(%);  
minfactorial(%);  
factor(%);  
factcomb(num(%))/factcomb(denom(%));
```

Manipulimi me shprehje trigonometrike

- Menyja *Simplify > Trigonometric simplification*
- Funksioni `trigsimp()` thjeshton shprehje trigonometrike duke zbatuar identitetet themelore trigonometrike:

```
tan(x)*sec(x)^2+(1-sin(x)^2)*cos(x)/cos(x)^2;
trigsimp(%);
```

- Funksioni `trigreduce()` kombinon prodhime dhe fuqi të funksioneve trigonometrike në funksione të këndeve të shumëfishta:

```
trigreduce(sin(x)^2);
trigreduce(sin(x)*cos(x));
trigreduce(sin(x)^2+sin(x)*cos(x)+cos(x)^2);
ratsimp(%);
trigreduce(sin(theta+%pi/2));
trigreduce(cos(theta+%pi/2));
```

Manipulimi me shprehje trigonometrike (Vazhdim)

- Funkzioni `expand()` zgjeron shprehjet trigonometrike:
`trigexpand(sin(x+y)+cos(x+y));`
`trigexpand(sin(2*x)+cos(3*x));`
`trigexpand(sin(theta/2));`
`trigexpand(sin(theta/2)), halfangles;`
- Funkzioni `trigrat()` thjeshton funksionet trigonometrike në formë kuazi-lineare:
`(sin(theta)+cos(theta))^2;`
`expand(%);`
`trigrat(%);`
`sin(theta)^3+sin(theta)^2+(sin(theta)+1)^2;`
`trigrat(%);`

Manipulimi me numra dhe shprehje komplekse

- Menyja *Simplify > Complex Simplification*
- Funksioni `rectform()` kthen formën kartezaine të një numri kompleks:

```
z1:x1+y1*i; z2:x2+y2*i;
z1+z2;
rectform(%);
rectform(z1*z2);
rectform(z1/z2);
rectform((3.5+2.6*i)^2);
```

- Funksioni `polarform()` kthen formën polare të një numri kompleks:

```
z1:r1*exp(%i*theta[1]); z2:r2*exp(%i*theta[2]);
polarform(z1+z2);
polarform(z1*z2);
polarform(z1/z2);
z1:2*exp(%pi/3*i); z2:exp(%pi/6*i);
polarform(z1*z2);
polarform(z1/z2);
```

Manipulimi me numra dhe shprehje komplekse (Vazhdim)

- Funksionet `realpart()` dhe `imagpart()` kthejnë pjesët reale, përaktësisht imagjinare të një numri kompleks:

```
rectform(z1);
```

```
realpart(z1);
```

```
imagpart(z1);
```

- Funksioni `demoivre()` implementon formulën e De Moivre-it $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$:

```
demoivre(exp(%i*theta));
```

```
demoivre(exp(5*%pi/3*%i));
```

Manipulimi me numra dhe shprehje komplekse (Vazhdim)

- Funkzioni `exponentialize()` është i kundërt me funksionin `demoivre()`:

```
exponentialize(sin(x+%i*y));
```

```
exponentialize(cos(x+%i*y));
```

- Funksione tjera për manipulim me shprehje komplekse:

```
declare(x,real, y, real);
```

```
z:x+%i*y;
```

```
carg(z);
```

```
cabs(z);
```

```
polarform(z);
```

```
conjugate(z);
```

```
z*conjugate(z);
```

```
rectform(%);
```

Shembull

Shembull

Le të jetë $z = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ për ndonjë numër të plotë n . Gjeni $1 + z + \dots + z^{n-1}$.

Zgjidhje

```
declare(n, integer);
z:cos(2*%pi/n)+%i*sin(2*%pi/n);
sum(z^k, k, 0, n-1);
%, simpsum;
exponentialize(z);
u:ratsimp(%);
sum(u^k, k, 0, n-1);
%, simpsum;

kill(z);
sum(z^k, k, 0, n-1);
%, simpsum;
%, z=u;
```

Manipulimi me shprehje

- Menyja *Simplify* > *Substitute*:
- Zëvendësimi i një ndryshoreje në shprehje

```
subst(x+1, y, y^2+y+a);  
ratsubst(x+1, y, y^2+y+a);
```

- Zëvendësimi i një list në shprehje

```
subst([x=a, y=b], x^2+y^2);  
subst([x=2, y=3], x^2+y^2);
```


Kompjutimi me module

- Menyja *Simplify > Modulus Computation...*:

- Llogaritja sipas modulit 3:

```
modulus : 3;  
[rat(-1), rat(0), rat(1), rat(1+1), rat(1+2),  
  rat(1+3), rat(1+4), rat(1+5), rat(1+6),  
  rat(1+7)];
```

- Llogaritja sipas modulit 5:

```
modulus:5;  
rat(2); rat(4);  
rat(2+4); rat(2)+rat(4);  
rat(2*4); rat(2)*rat(4);
```

Veprime me polinome

- Funksoni `coeff()` kthen koeficientin e polinomit:
 $p: x^4 + 2x^2 - 3x + 5;$
`[coeff(p,x,0), coeff(p,x,1), coeff(p,x,2),
coeff(p,x,3), coeff(p,x,4)];`
- Funksoni `divide()` pjesëton dy polinome:
`divide(p, x-2);`
`divide(x^3+2*x^2-8*x, x-2);`
- Funkzionet `quotient()` dhe `remainder()` kthejnë herësin dhe mbetjen e pjesëtimit të polinomeve:
`quotient(x^3+2*x^2-8*x, x-2);`
`remainder(x^3+2*x^2-8*x, x-2);`

Veprime me polinome (Vazhdim)

- Funksionet `allroots()` dhe `realroots()` kthejnë rrënjët e një polinomi:

```
p:x^4+3*x^3+5*x^2-x+5;
```

```
allroots(p);
```

```
realroots(p);
```

Përfundim

- Manipulimi me shprehje algjebrike
- Kompjutime kombinatorike dhe funksionesh speciale
- Manipulimi me shprehje trigonometrike
- Manipulimi me numra dhe shprehje komplekse
- Manipulimi me module dhe polinome